Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 12.01.2016 vor der Vorlesung abzugeben.

Blatt 10 — 05. Januar 2016

Aufgabe 1. Die Dimension eines K-Vektorraumes V bezeichnen wir mit $\dim_K(V)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ durch die Einschränkung der Skalare auf $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Nach (a) fassen wir V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Zeigen Sie, dass

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V).$$

Insbesondere ist $\dim_{\mathbb{C}}(V) < \infty$ genau dann, wenn $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$.

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ Eigenwerte von A sind.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

(c) Bestimmen Sie eine Matrix S mit $SAS^{-1} = D$, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ist.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum über einem Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f^2 = \mathrm{id}_V$.

(a) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung f diagonalisierbar ist und bestimmen Sie die Eigenwerte. (Hinweis: Faktorisieren Sie $f^2 - \mathrm{id}_V$.)

(b) Für $K = \mathbb{F}_2$, geben Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2$ mit $g^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2^2}$ an, die nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Schreiben Sie ein handgeschriebenenes DIN A4 Blatt mit Notizen zur Vorlesung. Dieses Blatt darf als einziges Hilfsmittel in der Probeklausur verwendet werden. Kopien sind nicht erlaubt, d.h. bei Mehrfachabgabe muss jeder ein eigenes Hilfsblatt schreiben.