Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 19.01.2016 vor der Vorlesung abzugeben.

Blatt 11 | 12. Januar 2016

Aufgabe 1. Welche der folgenden Matrizen ist über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Sei

$$V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} |\ a_n \in \mathbb{R},\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \forall n \geq 0\}$$

die Menge der Folgen vom Fibonacci-Typ. Zeigen Sie:

(a) V ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Die Indexshift-Abbildung $A : V \to V, (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots)$ ist ein Endomorphismus. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von A bezüglich einer geeigneten Basis von V.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und leiten Sie damit eine geschlossene Formel für die n-te Fibonaccizahl her.

Aufgabe 3. (a) Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = S^{-1} D^n S,$$

wobei $D = SAS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Berechnen A^{789}.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ eine invertierbare Matrix über einem Körper K und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $\lambda \neq 0$ ist und λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.