Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 26.01.2016 vor der Vorlesung abzugeben. Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der folgenden Seite zu finden: http://www.math.uni-sb.de/ag-rau/teaching/linalg1516/1516_linalg1.html

Blatt 12 — 19. Januar 2016

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer Sesquilinearform s. Wir definieren die *Gram'sche Matrix* einer Sesquilinearform bezüglich einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ als

$$G_{\{v_1,\dots,v_n\}}(s) := (s(v_i, v_j))_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}).$$

(a) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{C}^n \to V$ die zugehörige Koordinatenabbildung. Seien $x = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ und $y = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$ die Urbilder zweier Vektoren $v, w \in V$. Zeigen Sie:
$$s(v, w) = x^T G_{\mathcal{B}}(s)\overline{y}.$$

(b) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V und $S = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ die Basiswechselmatrix. Zeigen Sie die Transformationsformel für Sesquilinearformen
$$G_{\mathcal{B}}(s) = S^T G_{\mathcal{A}}(s)\overline{S}.$$

Aufgabe 2. Sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass durch
$$\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(A^T \cdot B)$$
ein Skalarprodukt definiert ist, wobei $\mathrm{Spur}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ für $M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3. Seien
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus v_1, v_2, v_3, v_4 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ bezüglich des kanonischen Skalarproduktes.

Aufgabe 4. Gegeben ist das Skalarprodukt
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$
auf dem Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

(a) Sei
$$U = \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} |\ f(x) = f(-x)\ \forall x \in [-1, 1]\}$$
der Untervektorraum der geraden Funktionen. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von U bezüglich $\langle -, - \rangle$.

(b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von
$$V = \langle 3 + 15x + 15x^2 + 5x^3, -3 + 15x^2 + 7x^3 \rangle \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$
bezüglich $\langle -, - \rangle$.