Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 02.02.2016 vor der Vorlesung abzugeben.

Blatt 13 — 26. Januar 2016

Aufgabe 1. Seien V, W euklidische/unitäre K-Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^{ad}(w)\rangle \text{ für alle } v \in V \text{ und } w \in W$$

eine lineare Abbildung $F^{ad} : W \to V$ eindeutig definiert wird, die sogenannte *adjungierte Abbildung* zu F. Zeigen Sie außerdem, dass

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F^{ad}) = \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)}^T$$

gilt, wobei $\mathcal{A}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}$ eine Basis von W ist.

Aufgabe 2. Nach einem Stoß befindet sich eine Billardkugel an der gleichen Stelle auf dem Billardtisch wie vor dem Stoß. Beweisen Sie unter idealisierten Bedingungen: Auf der Oberfläche dieser Billardkugel gibt es zwei Punkte, die sich vor und nach dem Stoß an der gleichen Stelle im Raum befinden.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\sqrt{3} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \frac{1}{8}\sqrt{3} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \frac{3}{8}\sqrt{3} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

orthogonal sind. Bestimmen Sie jeweils, ob es sich um eine Drehung oder Drehspiegelung handelt, und ermitteln Sie die Drehachsen und Winkel.

Aufgabe 4. (a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in O(4)$, so dass $S^T AS$ Diagonalgestalt hat.

(b) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1+2i \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-2i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte, Eigenräume und eine unitäre Matrix $Q \in U(3)$, sodass $\overline{Q}^T AQ$ Diagonalgestalt hat.