Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 03.11.2015 vor der Vorlesung abzugeben. Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der folgenden Seite zu finden: http://www.math.uni-sb.de/ag-rau/teaching/linalg1516/1516_linalg1.html

Blatt 2 — 27. Oktober 2015

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*, wenn aus $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$ folgt, dass $x = x'$ ist,
- *surjektiv*, wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$ ist,
- *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Aufgabe 1. Gegeben seien die Mengen X, Y, Z und Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Sei $h := g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$ die Komposition von f und g. Zeigen Sie:

(a) Ist h surjektiv, dann auch g.

(b) Ist h injektiv, dann auch f.

(c) In (a) muss f nicht surjektiv sein und in (b) g nicht injektiv. Geben Sie Beispiele an.

(d) Ist X endlich und $f : X \to X$ eine Abbildung, dann sind äquivalent:
- f ist injektiv,
- f ist surjektiv,
- f ist bijektiv.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren eine Basis bilden.

(i) $(1, 2, 3)$, $(3, 5, 7)$, $(7, 10, 14) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) $(x-1)^3$, $(x-1)^2$, $x-1$, $1 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} := \{a + bx + cx^2 + dx^3 |\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $(2, \lambda, 3)$, $(1, -1, 2)$, $(-\lambda, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$ eine Basis?

Aufgabe 3. Welche der folgenden Mengen U_i sind Untervektorräume der Vektorräume V_i? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $V_1 := \mathbb{R}^5,\ U_1 := \{x \in \mathbb{R}^5 \mid\ ||x|| = 1\}$ mit $||x|| := \sqrt{\sum_{i=1}^5 x_i^2}$.

(b) $V_2 := \mathbb{R}^4,\ U_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_4 = 0\}$.

(c) $V_3 := \mathbb{R}^3,\ U_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 0\}$.

(d) $V_4 := \mathbb{R}^4,\ U_4 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) = 0\}$.

(e) $V_5 := \mathbb{R}[x]_{\leq 3},\ U_5 := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid b + d = 0,\ a + c = 0\}$.

(f) $V_6 := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ U_6 := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = -f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

(g) $V_7 := \mathbb{R}[x]_{\leq 3},\ U_7 := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p''(1) = 0\}$.

(h) $V_8 := \mathbb{R}[x]_{\leq 6},\ U_8 := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 6} \mid p'(1) = 1\}$.

Aufgabe 4. Seien V, W $\mathbb{R}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass das Produkt $V \times W$ mit den Verknüpfungen

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'),\ \ \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.