Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 10.11.2015 vor der Vorlesung abzugeben. Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der folgenden Seite zu finden: http://www.math.uni-sb.de/ag-rau/teaching/linalg1516/1516_linalg1.html

Blatt 3 | 03. November 2015

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ zwei $\mathbb{R}$-Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) Der Schnitt $U \cap W$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum.

(b) Die Vereinigung $U \cup W$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum genau dann wenn $U \subset W$ oder $W \subset U$.

(c) Die Summe $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum.

(d) Die Summe $U + W$ ist der kleinste Untervektorraum, der die Vereinigung $U \cup W$ enthält.

Aufgabe 2. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (2, -2, 1)$ und $v_4 = (0, 2, 3)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $F = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Welche Vektoren aus F lassen sich als Linearkombination der übrigen darstellen?

(c) Geben Sie alle Unterfamilien von F an, die linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. Gegeben sei der aus der Vorlesung bekannte $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{\text{Abbildungen } f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Vektor

$$f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ i \mapsto \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

Beschreiben Sie den von diesen Vektoren aufgespannten Untervektorraum $\langle f_n, n \in \mathbb{N}\rangle$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$ mit $\omega > 0$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ sowie eine beliebige Linearkombination $\lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ lösen die Differentialgleichung.

(b) Die beiden Lösungen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ sind linear unabhängig (in $\mathcal{C}(\mathbb{R})$).

(c) Die Funktionen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ bilden eine Basis des Lösungsraumes der linearen Differentialgleichung. Hierbei dürfen Sie annehmen, dass sich jede Lösung $f(t)$ wie folgt darstellen lässt: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$, wobei $f^{(n)}(t)$ die n-te Ableitung von $f(t)$ ist.