Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 17.11.2015 vor der Vorlesung abzugeben. Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der folgenden Seite zu finden: http://www.math.uni-sb.de/ag-rau/teaching/linalg1516/1516_linalg1.html

Blatt 4 — 10. November 2015

Aufgabe 1. Sei $M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline \vdots \\ \hline v_m \end{pmatrix}$ eine $m \times n$ Matrix, wobei $v_1, \dots, v_m$ die Zeilenvektoren von M sind. Der *Zeilenraum* von M ist definiert als $\mathrm{ZR}(M) := \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass sich der Zeilenraum unter Zeilenumformungen (vertauschen, skalieren, addieren) nicht ändert.

(b) Sei nun M in Zeilenstufenform. Sei r der Index der letzten Stufe, d.h. $v_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq r$ und $v_i = 0$ für $r+1 \leq i \leq m$. Zeigen Sie, dass die Zeilenvektoren $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von $\mathrm{ZR}(M)$ bilden.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\langle (1,2,1,2,1), (2,3,4,3,2), (3,4,3,4,3), (1,0,1,0,1) \rangle$.

Aufgabe 2. (a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(i) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (24x_1 - 5x_2, 17x_1 + 2x_2)$,

(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 - x_2, x_1 - x_2^2)$,

(iii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 5, x_1 + x_2 + 1)$,

(iv) $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, f \mapsto (f(0,1), f(1,0))$.

(b) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{R}$-Vektorräumen derselben Dimension $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Die Menge der *Fixpunkte* von f ist $\mathrm{Fix}(f) := \{v \in V \mid f(v) = v\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}(f)$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum ist.

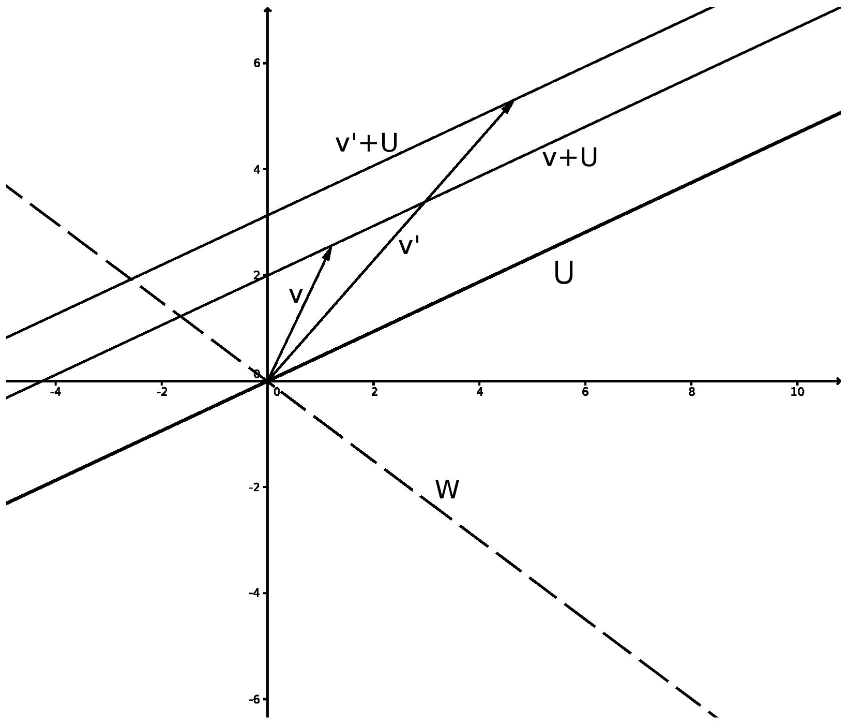
(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Fix}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ von

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -12 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 3 & -1 \\ 2 & -12 & 6 & -2 \\ 0 & -18 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Fix}(D)$, $\mathrm{Ker}(D)$ und $\mathrm{Im}(D)$ von $D : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d},\ p \mapsto p'$, wobei p' die Ableitung des Polynomes p ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $U \subset V$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum. Eine Teilmenge A von V heißt *affiner Untervektorraum parallel zu* U falls $A = v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ für ein $v \in V$.



(a) Seien A und A' zwei affine Untervektorräume parallel zu U. Zeigen Sie, dass

$$A + A' = \{a + a' \mid a \in A,\ a' \in A'\} \text{ und } \lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a \mid a \in A\} \text{ für } \lambda \neq 0$$

affine Untervektorräume parallel zu U sind. Wir definieren $0 \cdot A := U$.

(b) Zeigen Sie, dass $V/U := \{A \mid A \text{ ist affiner Untervektorraum parallel zu } U\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bzgl. diesen Operationen bildet.

(c) Sei W ein direkter Summand zu U. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$W \to V/U,\ w \mapsto w + U$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist. Es gilt also $W \cong V/U$.