Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 24.11.2015 vor der Vorlesung abzugeben. Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der folgenden Seite zu finden: http://www.math.uni-sb.de/ag-rau/teaching/linalg1516/1516_linalg1.html

Blatt 5 — 17. November 2015

Aufgabe 1. Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ eine $m\times n$ Matrix. Die Matrix A ist in *verfeinerter Zeilenstufenform*, falls Indizes $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_r\} \subset \{1, \ldots, m\}$ existieren, so dass

$$\begin{cases} a_{ij_i} = 1, \text{ für } 1 \leq i \leq r, \\ a_{ij} = 0, \text{ für } j < j_i \text{ oder } i > r, \\ a_{kj_i} = 0, \text{ für } k < i \text{ und } 1 \leq i \leq r. \end{cases}$$

(a) Stellen Sie die Matrix A in verfeinerter Zeilenstufenform schematisch dar.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix durch Zeilenumformungen in verfeinerte Zeilenstufenform bringen lässt.

(c) Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} \cdot e_{j_i} - e_j, \text{ für } j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$$

in $\operatorname{Ker}(A)$ liegen.

(d) Zeigen Sie, dass die Vektoren aus Aufgabenteil (c) eine Basis von $\operatorname{Ker}(A)$ bilden.

Aufgabe 2. Seien U, V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Weiterhin seien $f : U \to V$ and $g : V \to W$ lineare Abbildungen.

(a) Zeigen Sie, dass $g \circ f$ eine lineare Abbildung ist.

Sei $g \circ f$ ein Isomorphismus. Dann gilt:

(b) $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(U)$ und $\dim(\operatorname{Ker}(g)) = \dim(V) - \dim(U)$.

(c) $\operatorname{Ker}(g) \oplus \operatorname{Im}(f) = V$.

Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alle Matrizenprodukte $A_i \cdot A_j$ für $1 \leq i, j \leq 5$, falls diese definiert sind.

(b) Gegeben seien die linearen Abbildungen

$$D : \mathbb{R}[x]_{\leq d+1} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d},\ p \mapsto p' \text{ und } I : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d+1},\ p \mapsto \int_0^x p(y)\mathrm{d}y.$$

(i) Schreiben Sie die Abbildungen D und I bzgl. der Basen $\{1, x, \ldots, x^d\}$ und $\{1, x, \ldots, x^{d+1}\}$ als Matrizen.

(ii) Berechnen Sie die Verknüpfungen $D \circ I$ und $I \circ D$ als Matrizenmultiplikationen.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für jeden Unterraum $U \subset V$ gilt $f^{-1}(f(U)) = U + \mathrm{Ker}(f)$.

(b) Für jeden Unterraum $U' \subset W$ gilt $f(f^{-1}(U')) = U' \cap \mathrm{Im}(f)$.

(c) Die Abbildung $\mathrm{Im}(f) \to V/\mathrm{Ker}(f)$, $w \mapsto f^{-1}(w)$ ist ein Isomorphismus, wobei $V/\mathrm{Ker}(f)$ der Vektorraum der affinen Untervektorräume parallel zu $\mathrm{Ker}(f)$ aus Aufgabe 4, Blatt 4 ist.