Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 01.12.2015 vor der Vorlesung abzugeben. Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der folgenden Seite zu finden: http://www.math.uni-sb.de/ag-rau/teaching/linalg1516/1516_linalg1.html

Blatt 6 — 24. November 2015

Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und Bildes folgender Matrizen

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Seien $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ Basen von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ und $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

(b) Sei $D : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}, p \mapsto p'$. Berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(D)$ (vergleichen Sie Aufgabe 3 (b), Blatt 5) und das Matrizenprodukt

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(D) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

(c) Berechnen Sie nun $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$ (ohne die Transformationsformel zu benutzen) und überprüfen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D) = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(D) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{A} = \{(1,2,2,2), (-1,1,1,1), (1,1,2,2), (-1,-1,-1,1)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und sei $\mathcal{A}' = \{(2,4,6), (2,4,7), (2,5,6)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch ihre darstellende Matrix

$$M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Inverse Matrix von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$ der Abbildung f bzgl. der Standardbasen von $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, falls $A = A^t$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der symmetrischen Matrizen einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ bildet.

Eine Matrix A heißt *schiefsymmetrisch* (oder *alternierend*), falls $A^t = -A$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ bildet.

(c) Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ seien $A_s := \frac{1}{2}(A + A^t)$ und $A_a := \frac{1}{2}(A - A^t)$. Zeigen Sie, dass A_s symmetrisch ist, A_a alternierend ist und $A = A_s + A_a$ gilt.

(d) Beweisen Sie: $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$.