

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 08.12.2015 vor der Vorlesung abzugeben. Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der folgenden Seite zu finden: http://www.math.uni-sb.de/ag-rau/teaching/linalg1516/1516_linalg1.html

Blatt 7

01. Dezember 2015

Aufgabe 1. Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 7 & 1 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Schreiben Sie σ und τ in Zykelschreibweise sowie als Produkt von Transpositionen.
- Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$ und $\operatorname{sgn}(\tau)$.
- Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ und σ^{-1} .
- Die Ordnung einer Permutation $\pi \in S_n$ ist die kleinste Zahl $\operatorname{ord}(\pi) = k > 0$, so dass $\pi^k = \operatorname{id}$ ist. Bestimmen Sie die Ordnung von $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizen $T \in \operatorname{GL}(4, \mathbb{R})$ und $S \in \operatorname{GL}(5, \mathbb{R})$ so, dass TAS^{-1} die Normalform

$$TAS^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei $r = \operatorname{Rang}(A)$ und E_r die $r \times r$ Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & -4 \\ 4 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Determinante $\det(A)$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

- Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}((n+1) \times (n+1), \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4. Sei $M \in \operatorname{Mat}((n+m) \times (n+m), \mathbb{R})$ eine Matrix der Form

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right), \quad \text{mit } A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R}), \quad B \in \operatorname{Mat}(n \times m, \mathbb{R}) \text{ und } C \in \operatorname{Mat}(m \times m, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie: $\det(M) = \det(A) \cdot \det(C)$.