Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Linearen Algebra 1

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 05.01.2016 vor der Vorlesung abzugeben.

Blatt 9 — 15. Dezember 2015

Aufgabe 1. (a) Sei G eine Gruppe und seien $U_1, U_2 \subset G$ zwei Untergruppen. Zeigen Sie, dass $U_1 \cap U_2$ eine Untergruppe ist.

(b) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Wir definieren

$$\langle M \rangle := \{g_1 \circ \cdots \circ g_n | \ n \in \mathbb{N} \text{ und } g_i \in M \text{ oder } g_i^{-1} \in M \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$$

die von M *erzeugte Untergruppe von* G. Zeigen Sie:

(i) $\langle M \rangle$ ist eine Gruppe.

(ii) $\langle M \rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G die M enthält.

(c) Wir definieren die *Ordnung* eines Gruppenelementes $g \in G$ als $\mathrm{ord}(g) := \mathrm{ord}(\langle g \rangle)$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von g, falls endlich, die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, sodass $g^n = e$ ist.

Aufgabe 2. Seien G eine Gruppe und $g \in G$. Zeigen Sie, dass wenn $G = \langle g \rangle$ gilt, dann ist G isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$.

Aufgabe 3. (a) Sei G eine endliche Gruppe und seien $x, y \in G$ mit $x \cdot y = y \cdot x$ und $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{ord}(x \cdot y) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y))$$

(b) Welche Ordnungen von Permutationen können in S_5 und S_7 auftreten?

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $A_5 \subset S_5$ der geraden Permutationen nur Elemente der Ordnung $1, 2, 3, 5$ hat.

Aufgabe 4. Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und V ein K-Vektorraum der Dimension n.

(a) Zeigen Sie, dass V genau q^n Elemente hat.

(b) Wieviele Basen von V gibt es? Geben Sie eine Formel an und beweisen Sie diese.

Bitte wenden

Aufgabe 5. (a) Sei p eine Primzahl. Für welche p ist die folgende Matrix über $\mathbb{F}_p$ invertierbar?

$$M_p = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 7 \\ 7 & -1 & -1 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{F}_p)$$

(Der Einfachheit halber schreiben wir 13 anstatt $\overline{13} = 13 + p\mathbb{Z}$.)

(b) Berechnen Sie die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q}) \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{F}_3).$$

wobei $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$ der Körper mit 3 Elementen ist.

Aufgabe 6. Sei M ein reguläres n-Eck für $n \geq 3$ und sei $D_n := \mathrm{Sym}(M)$ die Symmetriegruppe von M, die sogenannte *Diedergruppe*. Zeigen Sie:

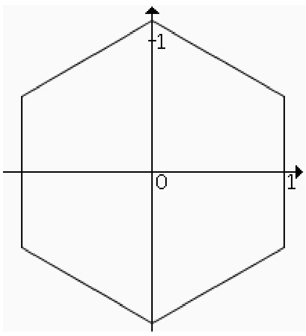

Abbildung 1: Ein reguläres Sechseck zentriert im Ursprung.

(a) Es existieren Elemente $\sigma, \tau \in D_n$ mit $\sigma^n = e$, $\tau^2 = e$ und $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$.

(b) Es gilt $D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$.

(c) Die Ordung von D_n ist $\mathrm{ord}(D_n) = 2n$.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!