Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Linearen Algebra 1

Ferienblatt 2 09. Februar 2016

Aufgabe 1. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $V = \mathrm{Mat}(3 \times 1, \mathbb{R})$ bilden und bestimmen Sie die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von $V^* = \mathrm{Mat}(1 \times 3, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Sei $f : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass

$$f^* : W^* \to V^*, \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

eine lineare Abbildun definiert, die sogenannte *duale Abbildung* zu f.

(b) Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume und sei $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ eine Basis von V bzw. W. Zeigen Sie, dass

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)^T.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Beispiele $(i) - (xi)$ aus der Vorlesung Äquivalenzrelationen definieren.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Beispiele $(i) - (iii), (v) - (xi)$ aus der Vorlesung Gruppenoperationen darstellen.

Aufgabe 5. Seien $G \times M \to M$ eine Gruppenoperation und $m \in M$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Stab}(m)$ eine Untergruppe von G bildet.

Aufgabe 6. Sei G eine Gruppe und sei $U \subset G$ eine Untergruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$U \times G \to G, (u, g) \mapsto gu^{-1}$$

eine Rechtsoperation definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$U \times G \to G, (u, g) \mapsto gu$$

eine Linksoperation definiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen der obigen Operationen den Linksnebenklassen entsprechen.

Aufgabe 7. Sei G eine Gruppe der Ordnung 109. Bestimmen Sie alle Untergruppen von G.