Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Wintersemester 2015/16
Jun.Prof. Johannes Rau
Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Linearen Algebra 1

Ferienblatt 02. Februar 2016

Aufgabe 1. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\langle x, y\rangle_A := x^T Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$ und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie:

$$\det((\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1,\ldots,n}) \geq 0$$

und es gilt Gleichheit genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind.

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $|| - ||$. Zeigen Sie:
Auf V gibt es ein Skalarprodukt $\langle -, -\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ genau dann, wenn die Norm die Parallelogrammidentität erfüllt, d.h. wenn für alle $v, w \in V$

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2 \cdot (||v||^2 + ||w||^2).$$

Dann gilt:

$$\langle v, w\rangle = \frac{||v + w||^2 - ||v - w||^2}{4}.$$

Aufgabe 4. Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und f ein Endomophismus. Zeigen Sie, dass f orthogonal ist genau dann, wenn $||f(v)|| = ||v||$ für alle $v \in V$ ist.

Aufgabe 5. Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d : V \times V \to \mathbb{R},\ (v, w) \mapsto ||v - w||$$

eine Metrik definiert, d. h. d erfüllt die folgenden Axiome:

(M1) $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$,

(M2) $d(v, w) = d(w, v)$ für alle $v, w \in V$,

(M3) $d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$ für alle $v, w, u \in V$.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden Quadriken:

$$Q_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_2 - 1 = 0\},$$

$$Q_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ 2x_1x_3 + x_2^2 + x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0\}.$$

Aufgabe 7. Sei $q(x) = x^2 + x - 1$. Durch

$$F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4},\ p(x) \mapsto q(x) \cdot p(x) \text{ und } G : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4},\ p(x) \mapsto p(q(x))$$

sind Vektorraumhomomorphismen gegeben.

(a) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ und $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(G)$ von F und G bezüglich der Basen $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

(b) Bestimmen Sie den Rang von F und G.

Aufgabe 8. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ Untervektorräume mit

$$U = \langle u_1, \ldots, u_s \rangle, V = \langle v_1, \ldots, v_t \rangle.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $W = (u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_t)$ hat der Vektorraumhomomorphismus

$$\varphi_W : \mathbb{R}^{s+t} \to \mathbb{R}^n,\ e_i \mapsto \begin{cases} u_i & \text{für } i = 1, \ldots, s \\ v_{i-s} & \text{für } i = s+1, \ldots, s+t \end{cases}$$

das Bild $\mathrm{Im}(\varphi_W) = U + V$.

(b) Die auf $\mathrm{Ker}(\varphi_W) \subset \mathbb{R}^{s+t}$ definierte Abbildung

$$\psi : \mathrm{Ker}(\varphi_W) \to U \cap V,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{s+t}) \mapsto \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i$$

ist ein wohldefinierter Epimorphismus.

(c) Ist $u_1, \ldots, u_s$ eine Basis von U und $v_1, \ldots, v_t$ eine Basis von V, dann ist

$$\psi : \mathrm{Ker}(\varphi_W) \to U \cap V$$

ein Isomorphismus.

Aufgabe 9. Seien

$$U = \langle (1,1,1,0,1), (2,1,0,0,1), (0,0,1,0,0) \rangle$$

und

$$V = \langle (1,1,0,0,1), (3,2,0,0,2), (0,1,1,1,1) \rangle$$

Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$.

(a) Geben Sie eine Basis von $U + V$ an.

(b) Bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$ und geben Sie eine Basis von $U \cap V$ an.

(c) Geben Sie eine Basis von $(U + V)^{\perp}$ bezüglich des kanonischen Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^5$ an.

Aufgabe 10. Diagonalisieren Sie die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}),$$

indem Sie eine invertierbare Matrix S^{-1} und eine Diagonalmatrix D angeben, sodass $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$ ist.

Aufgabe 11. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_α.

(b) Bestimmen Sie die $\alpha \in \mathbb{R}$, für die A_α einen, zwei oder drei verschiedene Eigenwerte hat.

(c) Berechnen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Eigenräume von A_α.

(d) Finden Sie eine orthogonale Matrix $S_\alpha \in O(3)$, sodass $S_\alpha^T A_\alpha S_\alpha$ Diagonalgestalt hat.