Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Präsenzblatt

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine natürliche Zahl. Wir verteilen n blaue und n rote Punkte auf einem Kreis und wählen einen weiteren Punkt S auf dem Kreis. Der Kreis wird einmal im Uhrzeigersinn bei S startend durchlaufen. Wir nennen einen Durchlauf "gut", falls zu jedem Zeitpunkt des Durchlaufes die Anzahl der blauen Punkte größer gleich der Anzahl der roten Punkte auf dem zurückgelegten Weg ist.
Zeigen Sie: zu jeder Verteilung der Punkte kann ein Startpunkt S gewählt werden, so dass der Durchlauf gut ist.

Aufgabe 2. Gegeben seien drei Ebenen

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\},\\
E_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 4\},\\
E_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1 + 4 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = 16\}
\end{aligned}$$

im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt $p \in E_1 \cap E_2 \cap E_3$ aller Ebenen.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgende Formel für $x \neq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} (x^k - k \cdot x^{k-1}) = \frac{(x^2 - (n+1)x + n + 1)x^n - x(x-1) - 1}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 4. Auf einem 8m langen Seil befinden sich 17 Marienkäfer. Jeder Marienkäfer hat 5 Punkte. Alle Käfer sind gleich schnell, immer in Bewegung und brauchen 3 Minuten, um von einem Ende des Seiles zum anderen zu krabbeln. Wenn zwei Käfer zusammenstoßen, ändern beide ihre Bewegungsrichtung. (Sie dürfen annehmen, dass die Bewegung nur entlang einer Geraden erfolgt.)

Wie lange dauert es höchstens bis alle Käfer das Seil verlassen haben? Begründen Sie Ihre Antwort.