Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 10 Abgabe: Mittwoch, 29. Juni

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume der Matrix A.

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 2 & 1 & 14 & 15 & 16 \\ -2 & 1 & 2 & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A von A sowie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie M^2, M^3, M^4 für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Was sind die Eigenwerte und Eigenräume von M?

(b) Sei $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, $\chi_A(t) = (-1)^n \cdot t^n$ genau dann, wenn A konjugiert zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix B ist. Eine Matrix $B = (b_{ij})$ heißt strikt obere Dreiecksmatrix, falls $b_{ij} = 0$ für $i \leq j$.

Aufgabe 4. Sei

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die $n \times n$ Matrix mit $n \geq 1$, deren Einträge nur aus Einsen besteht. Bestimmen und beweisen Sie eine Formel für das charakteristische Polynom χ_{A_n} von A_n.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)**.** Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Wir definieren die Abbildung

$$f_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f_\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Eigenwerte kann f_π haben? Geben Sie für alle möglichen Kombinationen ein Beispiel.