Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 12 Abgabe: Mittwoch, 13. Juli

Aufgabe 1. Stellen Sie fest, zu welchem Typ die folgenden Quadriken im $\mathbb{R}^2$ gehören, und zeichnen Sie diese, gemeinsam mit ihren Hauptachsen, jeweils in ein Koordinatensystem ein:

1. $-8x^2 + 12xy - 6x + 8y^2 - 18y + 8 = 0$,
2. $5x^2 - 8xy + 2x + 5y^2 + 2y + 1 = 0$.

Aufgabe 2. Stellen Sie fest, zu welchem Typ die folgende Quadrik im $\mathbb{R}^3$ gehört, und zeichnen Sie diese, gemeinsam mit ihren Hauptachsen, in ein Koordinatensystem ein:

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2xz + 2z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Aufgabe 3. Diagonalisieren Sie die folgende symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

indem Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$ bestimmen, so dass $A = S^{-1}DS$.

Aufgabe 4. Für $n \geq 2$, sei

$$q(x) = x^t A x + b^t x + c = (1\ x^t)\widetilde{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

ein quadratisches Polynom in n Variablen mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ die erweiterte Matrix (wie in Definition 25.6 im Skript).
Wir bezeichnen mit A' und $\widetilde{A'}$ die Matrizen, die entstehen, wenn wir die euklidische Bewegung $x = Sy + t$ (mit $S \in SO(n)$ eine spezielle orthogonale Matrix und $t \in \mathbb{R}^n$) auf q anwenden, d.h.

$$q'(y) := q(Sy + t) = y^t A' y + b'^t y + c' \text{ und } \widetilde{A'} = \begin{pmatrix} c' & \frac{b'^t}{2} \\ \frac{b'}{2} & A' \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') \text{ und } \mathrm{Rang}(\widetilde{A}) = \mathrm{Rang}(\widetilde{A'}).$$