Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 13 — Abgabe: Mittwoch, 20. Juli

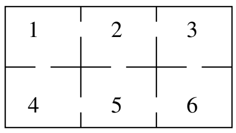
Aufgabe 1. (a) Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle -, - \rangle_{A_i}$ gegeben durch eine positive definite Matrix A_i aus Aufgabenteil (a), d.h.

$$\langle x, y \rangle_{A_i} = x^t A_i y, \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 2. Betrachten Sie das folgende Labyrinth, in dem sich eine Maus bewegt:



Befindet sich die Maus in Kammer i, so bleibt sie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dort und wechselt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2\omega_i}$ in die Kammer j, falls von Kammer i genau ω_i Türen abgehen und eine davon in Kammer j führt.
Stellen Sie die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,6}$ auf, wobei a_{ij} der obigen Wahrscheinlichkeit entspricht, dass die Maus von Kammer i nach Kammer j geht. Zeigen Sie außerdem, dass der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} A^k$ existiert und bestimmen Sie diesen.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $1, x, x^2, x^3$ eine Orthonormalbasis des Vektorraumes $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ bezüglich der Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)x^2 dx, \\ \langle p, q \rangle &= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)(1-x^2) dx. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie bezüglich beider Skalarprodukte aus (a) die orthogonale Projektion $\pi(f)$ von $f = x^2(x^2-1) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ auf U.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie Kern f und Bild f.

(b) Sei $P = (1, 1, 0)^t \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $Q := \mathrm{Bild}(P)$, das Bild von P unter der orthogonalen Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf Bild f.

(c) Berechnen Sie das Urbild $f^{-1}(Q) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = Q\}$ von Q unter f.