Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 1 — Abgabe: Mittwoch, 27. April

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und $1 \leq i \leq n-1$ gilt:

$$1 \leq \sqrt[i+1]{\binom{n}{i+1}} \leq \sqrt[i]{\binom{n}{i}} \leq n.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$.

Aufgabe 2. (a) Beweisen Sie die folgende Formel für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

(b) Zeigen Sie, dass n Geraden in der Ebene diese in höchstens $\binom{n+1}{2} + 1$ Gebiete unterteilen, und Gleichheit gilt, wenn keine Geraden parallel sind und keine 3 durch einen Punkt gehen.

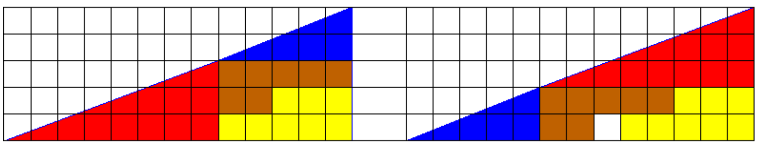
Aufgabe 3. Gegeben sind zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$:

$$g : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad h : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Abstand zwischen der Gerade g und dem Punkt $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, indem Sie den Abstand von Punkten auf g und v als eine Funktion von λ darstellen und das Minimum mittels Methoden aus MfI 1 berechnen.

(b) Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden g und h.

Aufgabe 4. (a) Woher kommt die Lücke?



(b) Seien vier beliebige Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Diese bilden ein Viereck $ABCD$. Die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA bezeichnen wir mit P, Q, R, S (in dieser Reihenfolge). Zeigen Sie: Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm.