Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 3 Abgabe: Mittwoch, 11. Mai

Aufgabe 1. (a) Prüfen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind. Bestimmen Sie in jedem Fall die Dimension des aufgespannten Raumes und geben Sie eine Basis an.

(1) $(1,1,0)^t$, $(1,0,1)^t$, $(0,1,1)^t \in (\mathbb{F}_2)^3$.

(2) $(1,2,3)^t$, $(2,3,4)^t$, $(3,4,5)^t \in \mathbb{R}^3$.

(3) $(5,0,5,-4)^t$, $(0,5,-5,-3)^t$, $(5,-5,10,-1)^t$, $(-4,-3,-1,5)^t \in \mathbb{R}^4$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(2,\lambda,3)^t$, $(1,-1,2)^t$, $(-\lambda,4,-3)^t \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig? Stellen Sie für diese λ den letzten Vektor als Linearkombination der ersten beiden dar.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Mengen U_i sind Untervektorräume der Vektorräume V_i? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $V_1 := \mathbb{R}^5,\ U_1 := \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \ ||x|| = 1\}$ mit $||x|| := \sqrt{\sum_{i=1}^5 x_i^2}$.

(b) $V_2 := \mathbb{R}^4,\ U_2 := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_4 = 0\}$.

(c) $V_3 := \mathbb{R}^3,\ U_3 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 0\}$.

(d) $V_4 := \mathbb{R}^4,\ U_4 := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) = 0\}$.

(e) $V_5 := \mathbb{R}[x]_{\leq 3},\ U_5 := \{p = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid b + d = 0,\ a + c = 0\}$.

(f) $V_6 := \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ U_6 := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) = -f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$, wobei $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist.

(g) $V_7 := \mathbb{R}[x]_{\leq 3},\ U_7 := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p''(1) = 0\}$.

(h) $V_8 := \mathbb{R}[x]_{\leq 6},\ U_8 := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 6} \mid p'(1) = 1\}$.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ zwei K-Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) Der Schnitt $U \cap W$ ist ein K-Untervektorraum.

(b) Die Vereinigung $U \cup W$ ist ein K-Untervektorraum genau dann wenn $U \subset W$ oder $W \subset U$.

(c) Die Summe $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ ist ein K-Untervektorraum.

(d) Die Summe $U + W$ ist der kleinste Untervektorraum, der die Vereinigung $U \cup W$ enthält.

Aufgabe 4. Sei

$$S = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) |\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ mit } x_0, x_1 \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der rekursiv definierten Folgen, die der Rekursionsvorschrift $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ genügen.

(a) Zeigen Sie, dass S ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $\xi_1 \neq \xi_2$, so dass

$$s_i := (1, \xi_i, \xi_i^2, \xi_i^3, \dots) \in S \text{ für } i = 1, 2.$$

(c) Zeigen Sie, dass s_1 und s_2 eine Basis von S bilden.

(d) Finden Sie eine geschlossene Formel für x_n mit $x_0 = x_1 = 1$.

Aufgabe 5 (Extrapunkte)**.** Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ der Vektorraum der Polynome von Grad $\leq d$. Zeigen Sie, dass $\{\binom{d}{i} x^i (1-x)^{d-i} \mid i = 0, \dots, d\}$ eine Basis von V bildet.