Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 4 — Abgabe: Mittwoch, 18. Mai

Aufgabe 1. (a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_5$ für die Vektoren $b_1 = (1,2,3,4)^t$ und $b_2 = (4,3,2,2)^t$. [1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = b_i, \text{ für } i = 1,2.$$

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie alle Matrizen der Form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$

(b) Man sagt, eine $n \times n$ Matrix M kommutiert mit einer $n \times n$ Matrix N, wenn $MN = NM$. Bestimmen Sie alle reellen 2×2 Matrizen, die mit jeder reellen 2×2 Matrix kommutieren.

Aufgabe 3. Seien $v_1 = (1,3,-2,2)^t$, $v_2 = (-3,2,-1,1)^t$, $v_3 = (1,3,-2,3)^t$.

$$V := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind und somit eine Basis von V bilden.

(b) Ist es möglich, einen der Vektoren v_1, v_2, v_3 durch $v = (-5,-4,3,-5)^t$ auszutauschen, um eine neue Basis von V zu bekommen? Wenn ja, welchen?

(c) Ist es möglich, einen der Vektoren v_1, v_2, v_3 durch $w = (-1,2,-3,4)^t$ auszutauschen? Wenn ja, welchen?

(d) Finden Sie einen Vektor $v_4 \in \mathbb{R}^4$, der v_1, v_2, v_3 zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzt.

Aufgabe 4. Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{\text{Abbildungen } f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Vektor

$$f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ i \mapsto \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

Beschreiben Sie den von diesen Vektoren aufgespannten Untervektorraum $\langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle$. Begründen Sie Ihre Antwort.

[1] Der Einfachheit halber schreiben wir $a = \overline{a}$ für Elemente aus $\mathbb{F}_5$.