Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 6 — Abgabe: Mittwoch, 01. Juni

Aufgabe 1. Seien $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ Basen von $K[x]_{\leq 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ und $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

(b) Sei $D : K[x]_{\leq 3} \to K[x]_{\leq 3}, p \mapsto p'$. Berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(D)$ und das Matrizenprodukt

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(D) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

(c) Berechnen Sie nun $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$ (ohne die Transformationsformel zu benutzen) und überprüfen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D) = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(D) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild derjenigen linearen Abbildungen, die durch folgende Matrizen definiert werden. Überprüfen Sie die Dimensionsformel für diese Beispiele.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kurze Begründung:

(1) $\text{Kern } A \subset \text{Kern } A^2 \quad \forall A \in K^{n\times n}$, (2) $\text{Kern } A \supset \text{Kern } A^2 \quad \forall A \in K^{n\times n}$,
(3) $\text{Bild } A \subset \text{Bild } A^2 \quad \forall A \in K^{n\times n}$, (4) $\text{Bild } A \supset \text{Bild } A^2 \quad \forall A \in K^{n\times n}$.

Aufgabe 3. (a) Geben Sie für die folgenden Permutationen deren Zykelschreibweise, Ordnung und Signum an:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8,$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 3 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \in S_8.$$

(b) Geben Sie für jede der Permutationsgruppen S_i, $i = 4, 5, 6, 7$, je ein Element $s_i \in S_i$ maximaler Ordnung an.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass die darstellende Matrix A_f (d.h. $f(x) = A_f x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$) *orthogonal* ist, d.h. dass $A_f \cdot A_f^t = E_2$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass die Menge $O(2) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot A^t = E_2\}$ aller orthogonalen Matrizen mit dem Matrizenprodukt als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

(b) Sei $SO(2) := \{A \in O(2) : \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1\}$ die Gruppe der speziellen orthogonalen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$SO(2) = \{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi[\}.$$

und begründen Sie, warum ein Element aus $SO(2)$ eine Drehung um den Ursprung um den Winkel α beschreibt.