Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 8 — Abgabe: Mittwoch, 15. Juni

Aufgabe 1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung, die durch unten stehende Matrix $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ definiert wird, ein Isomorphismus?

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{7}t & \frac{5}{2}t & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -7t & 8 & -2t \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 2 & \frac{1}{3} & t \\ 0 & 0 & 3 & 2t & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Gegeben seien n Punkte $p_1 = (p_{11}, \ldots, p_{1n}), \ldots, p_n = (p_{n1}, \ldots, p_{nn}) \in \mathbb{R}^n$, welche eine Hyperebene

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_1(p_1 - p_n) + \cdots + \lambda_{n-1}(p_{n-1} - p_n) + p_n, \text{ für } \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

aufspannen, d.h. die $(n-1)$ Differenzvektoren $p_1 - p_n, p_2 - p_n, \ldots, p_{n-1} - p_n$ sind linear unabhängig. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\widetilde{H} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} & 1 \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} & 1 \end{pmatrix} = 0\}$$

die Hyperebene H definiert. Hierzu müssen Sie insbesondere zeigen, dass $\widetilde{H}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

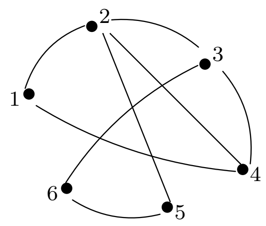
Aufgabe 3. Sei $G = (V, E)$ ein schleifenfreier ungerichteter Graph, wobei V die Menge der Knoten und $E \subset V \times V$ die Menge der Kanten ist. Sei $n = |V|$ die Anzahl der Knoten, die wir mit 1 bis n durchnummerieren. Die *Adjazenzmatrix* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{N}^{n\times n}$ des Graphen G ist wie folgt definiert:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Wie sind die Einträge von A^2 bzw. A^k für $k \in \mathbb{N}$ zu interpretieren? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(b) Sei $B := \sum_{k=1}^{n-1} A^k$. Zeigen Sie, dass G genau dann zusammenhängend ist, wenn B keine Nulleinträge hat.

(c) Sei G der folgende Graph.



Stellen Sie die Adjazenzmatrix des Graphens auf. Wie viele Wege der Länge ≤ 4 von Knoten 1 zu Knoten 4 gibt es?

Aufgabe 4. Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen und $l \in \mathbb{N}$, so dass für alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$ gilt, dass $|a_{ij}| \leq 2^l$.

(a) Zeigen Sie, dass
$$|\det(A)| \leq 2^{n\cdot(l+\log(n))},$$
wobei $\log(n)$ den Logarithmus zur Basis 2 bezeichnet.

(b) Wir bezeichnen mit $\overline{a_{ij}} \in \mathbb{F}_p$ ($= a_{ij} \mod p$) den Rest bei Division mit einer Primzahl p. Zeigen Sie, dass
$$\det\left((\overline{a_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}\right) = \overline{\det(A)} = \det(A) \mod p.$$

(c) (4 Zusatzpunkte) Leiten Sie mit den Ergebnissen aus (a) und (b) einen Algorithmus zur Berechnung von $\det(A)$ her, dessen Laufzeit (oder die sogenannte Bitkomplexität = Anzahl der Bitoperationen) polynomiell von l und n abhängt. Hierbei dürfen Sie verwenden, dass eine arithmetische Operation in $\mathbb{F}_p$ mit Hilfe von einfacher Schularithmetik[1] in einer Laufzeit von $O(p^2)$ durchgeführt werden kann.

[1] Es gibt schnellere Verfahren, die eine Laufzeit von $O(n\cdot\log(p)\cdot\log(\log(p)))$ (genauer sogar $O(p\cdot\log p\cdot 2^{3\log^*(p)})$) ermöglichen.