Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Ferienblatt — Abgabe bis Freitag, 30. September

Aufgabe 1. Sei $q(x) = x^2 + x - 1$. Durch

$$F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4},\ p(x) \mapsto q(x) \cdot p(x) \text{ und } G : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4},\ p(x) \mapsto p(q(x))$$

sind Vektorraumhomomorphismen gegeben.

(a) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ und $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(G)$ von F und G bezüglich der Basen $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

(b) Bestimmen Sie den Rang von F und G.

Aufgabe 2. Seien

$$U = \langle (1, 1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0) \rangle$$

und

$$V = \langle (1, 1, 0, 0, 1), (3, 2, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 1, 1) \rangle$$

Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$.

(a) Geben Sie eine Basis von $U + V$ an.

(b) Bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$ und geben Sie eine Basis von $U \cap V$ an.

(c) Geben Sie eine Basis von $(U + V)^{\perp}$ bezüglich des kanonischen Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^5$ an.

Aufgabe 3. Gegeben ist eine rekursiv definierte Folge $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit den Anfangswerten $a_1 = a_0 = 1$. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für a_n.

Aufgabe 4. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$. Für welche Primzahlen p ist das Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen die Lösungsmenge.

Aufgabe 5. Diagonalisieren Sie die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

indem Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D angeben, sodass $D = S \cdot A \cdot S^{-1}$ ist.

Aufgabe 6. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_α.

(b) Bestimmen Sie die $\alpha \in \mathbb{R}$, für die A_α einen, zwei oder drei verschiedene Eigenwerte hat.

(c) Berechnen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Eigenräume von A_α.

(d) Finden Sie eine orthogonale Matrix $S_\alpha \in O(3)$, sodass $S_\alpha^t A_\alpha S_\alpha$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 7. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie:

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

Aufgabe 8. Diagonalisieren Sie die folgende symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

indem Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$ bestimmen, so dass $A = S^t D S$.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden Quadriken:

$$Q_1 := \{(x, x, z) \in \mathbb{R}^3 |\ \frac{1}{2}x^2 + xz + y^2 + \frac{1}{2}z^2 + 2y - 1 = 0\},$$

$$Q_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2xz + y^2 + x + y + z - 1 = 0\}.$$

Aufgabe 10. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und sei $H \subset G$ ein Normalteiler, d.h. H ist eine Untergruppe mit $g \circ H = H \circ g$ für alle $g \in G$ (Rechts- und Linksnebenklassen stimmen überein). Zeigen Sie, dass G/H (die Menge der Nebenklassen von H) mit der Verknüfung

$$(g_1 \circ H) \cdot (g_2 \circ H) = (g_1 \circ g_2) \circ H$$

eine Gruppe bildet, die sogenannte Faktorgruppe.