Die Lokalisierung von Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ und residualzerlegbare Operatortupel

Diplomarbeit von Torsten Becker
nach einem Thema von Prof. Dr. Ernst Albrecht,
Fachbereich Mathematik an der Universität des Saarlandes,
Saarbrücken, 1998

Einleitung

Es ist wohlbekannt, welche weitreichenden Anwendungen die Aussagen der klassischen Spektraltheorie in Mathematik und theoretischer Physik haben. Eine Spektraltheorie für eine Klasse von Operatoren ist dabei eine Gesamtheit von Aussagen, die Verbindungen herstellen zwischen dem Spektrum eines Operators und seinen algebraischen und analytischen Eigenschaften, wie etwa invariante Unterräume, Wirkungsweise des Operators auf bestimmte Vektoren (z.B. als Multiplikationsoperator; man denke an Eigenwerte) und Funktionalkalküle. Nichtzuletzt förderten die Bedürfnisse der Quantenmechanik die Entwicklung der Spektraltheorie auf unendlichdimensionalen Hilberträumen. Sehr weitreichende Ergebnisse erhält man dabei für selbstadjungierte Operatoren.

Aufgrund der verbreiteten Anwendungen ist es daher verständlich, daß es Bemühungen gab und gibt, solche Aussagen für größere Klassen von Operatoren zu bekommen; man möchte sich dabei von Einschränkungen wie etwa der Existenz von Spektralmaßen befreien. Es ist klar, daß dabei Kompromisse gemacht werden müssen; solch starke Resultate wie im selbstadjungierten Fall sind nicht zu erwarten. Trotzdem hat sich mit der Suche nach allgemeinen Spektraltheorien ein neuer Zweig der Funktionalanalysis aufgetan, die *lokale Spektraltheorie*.

Zum Zwecke der Motivation soll kurz ein zentraler Begriff dieser Theorie besprochen werden: die *Zerlegbarkeit*.

Einer der ersten Schritte in Richtung einer Verallgemeinerung war die Einführung der *Skalar-* bzw. *Spektraloperatoren* von Dunford. Hier werden die Konzepte der Diagonal- und Jordandarstellung bei Matrizen auf beliebige Banachräume übertragen. Wie in der klassischen Spektraltheorie ist es auch hier möglich, eine Überdeckung des Spektrums des Operators auf eine Zerlegungen des zugrunde liegenden Raumes zu übertragen (man denke z.B. an die Spektralprojektionen bei nichtzusammenhängendem Spektrum). Man kann daher zu der Ansicht gelangen, daß diese Eigenschaft grundlegender Bestandteil jeder vernünftigen Spektraltheorie sein sollte. Dies nahm *Foiaş* als Ausgangspunkt seiner Studien und führte den Begriff des *zerlegbaren Operators* ein ([11]):

Ein Operator $T \in L(X)$ heißt zerlegbar*, wenn es zu jeder endlichen, offenen Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_n\}$ von $\sigma(T)$ abgeschlossene, unter T invariante Unterräume $X_1, \ldots, X_n$ gibt mit den Eigenschaften*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \textit{und} \qquad \sigma(T|X_i) \subset U_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ein Operator heißt *subzerlegbar*, wenn er ähnlich ist zur Einschränkung eines zerlegbaren Operators auf einen invarianten abgeschlossenen Unterraum. Ausführliche Informationen über die Klasse der zerlegbaren Operatoren findet man in der Monographie [4].

Auch *Bishop* untersuchte unter anderem Operatoren mit geeigneten Zerlegungsmöglichkeiten ([3]). Seine Vorgehensweise bestand grob gesagt darin, in Bezug auf einen Operator T abgeschlossene invariante Unterräume zu definieren, die sog. *Spektralräume*, welche bei Präsenz eines Spektralmaßes mit den Bildern der durch das Maß gegebenen Projektionen zusammenfallen und zwischen diesen Räumen Beziehungen zu postulieren. Auf der Suche nach hinreichenden Bedingungen dafür, daß diese Spektralräume den Grundraum in gewisser Weise zerlegen, isolierte er folgende analytische Eigenschaft stetiger linearer Operatoren:

Es bezeichne $\mathcal{O}(U,X)$ den Raum der analytischen Funktionen auf einer offenen Menge U in $\mathbb{C}$ mit Werten im Banachraum X, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von U. Ein Operator $T \in L(X)$ hat die Eigenschaft *(β), wenn die Abbildung*

$$\alpha_T : \mathcal{O}(U,X) \longrightarrow \mathcal{O}(U,X), \qquad (\alpha_T f)(z) := (z-T)\,f(z)$$

injektiv mit abgeschlossenem Bild ist für alle $U \subset \mathbb{C}$ offen.

Aufgrund der Vorbemerkungen ist es nicht verwunderlich, daß zwischen Zerlegbarkeit und Eigenschaft (β) eine Beziehung besteht; genauer ([2]):

Satz 1: Ein Operator $T \in L(X)$ hat genau dann (β), wenn er subzerlegbar ist.

Die Definition der Eigenschaft (β) ist in gewissem Sinne auch lokal sinnvoll: man kann die Vereinigung aller offenen Mengen U in $\mathbb{C}$ betrachten, für die α_T auf $\mathcal{O}(U,X)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild ist. Ist die dabei verbleibende Restmenge leer, so hat man (β). Aber nicht jeder Operator hat Eigenschaft (β). Bezeichnet S die in diesem Fall nichtleere Restmenge, dann sagt man, der Operator habe *Eigenschaft (β) modulo S*. Es stellt sich dann die Frage, ob die Menge S so kontrolliert werden kann, daß noch Aussagen möglich sind. Tatsächlich kann der Begriff der Zerlegbarkeit so abgewandelt werden, daß S in gewissem Sinne von den Überdeckungen gemieden wird: man fordert von den Mengen U_i, die zur Überdeckung des Spektrums herangezogen werden, noch zusätzlich $S \subset U_i$ bzw. $\overline{U}_i \cap S = \emptyset$. Man spricht dann von *$S$-Zerlegbarkeit* (oder auch *Residualzerlegbarkeit*). Folgende allgemeinere Version von Satz 1 konnte dann von Albrecht und Eschmeier in [2] bewiesen werden (S-subzerlegbar ist analog zu subzerlegbar definiert):

Satz 2: Ein Operator hat genau dann (β) modulo S, wenn er S-subzerlegbar ist.

Man erhält Satz 1 aus Satz 2, wenn man $S = \emptyset$ setzt.

Nun liegt es nahe, in der Definition der Eigenschaft (β) die analytischen Funktionen etwa durch glatte zu ersetzen. Man gelangt so zur Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$. Eine natürliche Frage ist dann, ob ein geeigneter Ersatz für die Subzerlegbarkeit existiert, der eine Charakterisierung von $(\beta)_{\mathcal{E}}$ erlaubt ähnlich der in Satz 1. Eschmeier und Putinar fanden in der Existenz von Erweiterungen mit geeignetem Funktionalkalkül diesen Ersatz ([7]) und ihre Ergebnisse bilden einen Teil des ersten Paragraphen. Danach werden wir die lokale Version der Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ studieren ($(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S) und eine Aussage ähnlich der von Satz 2 beweisen (Sätze 1.24 und 1.27).
Daß solche allgemeineren Betrachtungen auch wirklich Sinn machen, soll anschließend im zweiten Paragraphen an Beispielen besprochen werden, wo auch eine Anwendung auf gewichtete Shiftoperatoren zu finden ist.

Im zweiten Teil der Arbeit werden wir uns wieder der Zerlegbarkeit zuwenden, diesmal allerdings in mehreren Dimensionen: wir werden die S- oder Residualzerlegbarkeit von Operator*tupeln* untersuchen (die aber nicht der vorhin bei einem einzelnen Operator gemachten Definition entspricht; siehe dazu die Schlußbemerkung in Paragraph 4),
wozu im dritten Paragraphen an die Grundlagen der mehrdimensionalen (lokalen) Spektraltheo-

rie erinnert wird. Es zeigt sich dann in den folgenden Paragraphen, daß man alle wesentlichen Aussagen aus der Theorie der zerlegbaren Tupel übertragen kann, einschließlich der Tatsache, daß die Existenz gewisser Funktionalkalküle für den Operator die Residualzerlegbarkeit nach sich zieht (Satz 5.4). Auch existiert ein Zusammenhang zu einer modifizierten Version der mehrdimensionalen Eigenschaft (β) (Satz 4.17). Höhepunkt ist die Äquivalenz von Residualzerlegbarkeit und 2-Residualzerlegbarkeit.

Mein herzlicher Dank geht an Prof. Dr. Ernst Albrecht für den interessanten Themenvorschlag und seine intensive Betreuung. Mein Dank gilt aber auch Prof. Dr. Jörg Eschmeier, der allzeit ein offenes Ohr für meine Fragen hatte. Meinem Freund Eric Réolon danke ich für die gute Kameradschaft und seine geduldige Hilfe im Kampf mit Latex.

Inhaltsverzeichnis

§1 Die Lokalisierung von Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$

Die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$

1.1 Wir betrachten im folgenden die Räume $\mathcal{C}^\infty(U,X)$ der unendlich oft partiell differenzierbaren Funktionen auf $U \subset \mathbb{C}$ offen mit Werten im Banachraum X (Differenzierbarkeit ist immer im Sinne der Normkonvergenz des Differenzenquotienten zu verstehen). Diese tragen üblicherweise die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz aller (partiellen) Ableitungen auf allen kompakten Teilmengen von U, die erzeugt wird von dem Halbnormensystem

$$p_{\alpha,V}(f) := \sup_{z\in V} \|D^\alpha f(z)\|, \tag{1.1}$$

wobei $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die Ableitungsordnung angibt und V eine relativkompakte Teilmenge von U ist. Setzt man für die Mengen V eine relativkompakte Ausschöpfung $\{V_m\}$ von U ein, so erhält man ein abzählbares Halbnormensystem $\mathcal{P} = \{p_{\alpha,V_m}\}$, welches dieselbe Topologie erzeugt und $\mathcal{C}^\infty(U,X)$ zu einem (F)-Raum (Fréchet-Raum) macht (Informationen hierzu findet man etwa in [10] und [29]).
Für unsere Zwecke geeigneter ist jedoch die lokalkonvexe Topologie, die durch das Halbnormensystem

$$p_{m,k}(f) := \|\bar\partial^k f\|_{2,V_m} = \left(\int_{V_m} \|\bar\partial^k f(z)\|^2\, dz\right)^{1/2}, \tag{1.2}$$

V_m wie oben, erzeugt wird. Dabei ist $\bar\partial f = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} f + i\frac{\partial}{\partial y} f)$. Man kann durch die Forderung der Endlichkeit der rechten Seite von (1.2) die Funktionenklasse $L^2(V_m, X)$ definieren, allgemeiner sogar $L^p(\Omega, X)$ für $p \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen; diese sind Banachräume mit einer wie im Skalaren definierten Norm.
Die Topologien (1.1) und (1.2) sind äquivalent, haben also die selben konvergenten Folgen. Das folgt aus der Tatsache, daß die Abbildung

$$\mathrm{id} : (\mathcal{C}^\infty(U,X), p_{\alpha,V}) \longrightarrow (\mathcal{C}^\infty(U,X), p_{m,k})$$

ein Homöomorphismus ist (oder wegen $\mathcal{C}^\infty(U,X) = \mathrm{proj}\,\{W^k(V,X),\ V \subset\subset U, k \geq 0\}$, W^k wie in (1.3); siehe [8], Abschnitt 6.4)
Mit $\mathcal{E}(U,X)$ bezeichnen wir ab jetzt den (F)-Raum $\mathcal{C}^\infty(U,X)$ versehen mit der Topologie aus (1.2). Ist $X = \mathbb{C}$, schreiben wir $\mathcal{E}(U)$.
Der in der Einleitung definierte Raum $\mathcal{O}(U,X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{E}(U,X)$, wie sofort aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz für holomorphe Funktionen folgt.
Neben $\mathcal{E}(U,X)$ werden spezielle Sobolevräume eine wichtige Rolle spielen. Der Sobolevraum vom Grad n bezüglich $\bar\partial$ auf Ω ($\subset \mathbb{C}$ offen) mit Werten in X ist gegeben als

$$W^n(\Omega,X) := \{f \in L^2(\Omega,X); \bar\partial^j f \in L^2(\Omega,X), 1 \leq j \leq n\}. \tag{1.3}$$

Dabei sind die Ableitungen im Distributionensinne zu verstehen. Die W^n- Räume werden vermöge

$$\|f\|_{W^n(\Omega,X)} := \left(\sum_{j=0}^{n} \|\bar{\partial}^j f\|_{2,\Omega}^2\right)^{1/2}$$

zu Banachräumen. Wenn X ein Hilbertraum ist, ist durch

$$< f, g > := \sum_{j=0}^{n} \int_\Omega < \bar{\partial}^j f(z), \bar{\partial}^j g(z) > \, dz$$

ein Skalarprodukt gegeben, mit dem $W^n(\Omega, X)$ vollständig ist.
Es sei noch erwähnt, daß das Produkt einer $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$-Funktion eingeschränkt auf Ω mit einer $W^n(\Omega, X)$-Funktion wieder in $W^n(\Omega, X)$ liegt (das ist für die Definition der Funktionalkalküle wichtig).

1.2 Definition *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{F}(U, X)$ die Menge der X-wertigen Funktionen auf U. Dann bezeichne α_T den Operator*

$$\begin{aligned} \alpha_T : \mathcal{F}(U, X) \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{F}(U, X) \\ (\alpha_T f)(z) \quad &:= \quad (z - T) f(z). \end{aligned}$$

Der Operator α_T ist offensichtlich linear. Sollte die Abhängigkeit des Operators α_T von der Menge U von Bedeutung sein, so wird dies entsprechend berücksichtigt.
Den Raum $\mathcal{F}(U, X)$ werden wir im Laufe der Ausführungen durch speziellere Funktionenklassen ersetzen (in der Einleitung war $\mathcal{F} = \mathcal{O}$), wie zum Beispiel in der folgenden Definition.

1.3 Definition *Ein Operator $T \in L(X)$ hat die* Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$*, falls*

$$\alpha_T : \mathcal{E}(U, X) \longrightarrow \mathcal{E}(U, X)$$

injektiv mit abgeschlossenem Bild ist für alle offenen Teilmengen U von $\mathbb{C}$.

Daß $\alpha_T f$ wieder in $\mathcal{E}(U, X)$ ist, folgt aus der Stetigkeit von T (Vertauschbarkeit von T und den Ableitungen D^β). Insbesondere hat man

$$\bar{\partial}^j \alpha_T f = \alpha_T \bar{\partial}^j f \tag{1.4}$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Desweiteren ist α_T stetig.
Da die auf U holomorphen Funktionen einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{E}(U, X)$ bilden, folgt aus Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ schon Eigenschaft (β) und somit die Subzerlegbarkeit. Die Umkehrung gilt nicht, wie in 2.3 gezeigt wird.
Äquivalente Formulierungen von $(\beta)_{\mathcal{E}}$ liefert die folgende Aussage ([7], Prop. 3.1). Dabei sei wie üblich $\mathcal{D}(\Omega, X)$ der Raum der Testfunktionen auf Ω mit Werten in X.

1.4 *Sei $T \in L(X)$ und $\Omega \supset \sigma(T)$ eine beschränkte offene Menge. Dann sind äquivalent:*

1. *T hat die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$.*
2. *Für jede offene Kreisscheibe $D(z_0, r)$ in $\mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren $C > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\|f\|_{2,D(z_0,r)} \leq C \sum_{k=0}^{n} \|\alpha_T \bar{\partial}^k f\|_{2,D(z_0,r+\varepsilon)}, \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{C}, X).$$

3. Es gibt $C > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|f\|_{2,\Omega} \leq C\|\alpha_T f\|_{W^n(\Omega,X)}, \quad f \in \mathcal{D}(\Omega, X).$$

Der Nachweis von $(\beta)_{\mathcal{E}}$ für einen gegebenen Operator ist im allgemeinen recht schwierig. Für eine bestimmte Operatorenklasse ist dies jedoch möglich. Da die hier verwendete Methode teilweise noch für spätere Zwecke wichtig ist (Satz 2.10), gehen wir kurz darauf ein. Zunächst wird ein klassisches Resultat der Analysis benötigt, das als Cauchy-Pompeiu-Formel bekannt ist.

1.5 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt mit stückweise glattem Rand ∂G. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$ und jedes $z \in G$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_G \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\lambda^2(\zeta).$$

Den Beweis, der sich im wesentlichen des Stokesschen Integralsatzes bedient, findet der Leser etwa in [9], Kapitel III,3.

1.6 Lemma *([7]) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Für eine X-wertige Funktion f bezeichne $\delta_T f$ die Abbildung $z \mapsto (\bar{z} - T)f(z)$. Dann existiert eine Konstante C_Ω, so daß für jeden Operator $T \in L(X)$ und jede Funktion $f \in \mathcal{D}(\Omega, X)$ die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|f\|_{2,\Omega} \leq C_\Omega(\|\delta_T \bar{\partial} f\|_{2,\Omega} + \|\delta_T \bar{\partial}^2 f\|_{2,\Omega}). \tag{1.5}$$

▷**Beweis:** Wir wenden 1.5 auf die Funktion $f - \delta_T \bar{\partial} f$ an. Da das Randintegral wegen des kompakten Trägers von f verschwindet, erhalten wir:

$$f(z) - (\delta_T \bar{\partial} f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\bar{\partial}(f - (\delta_T \bar{\partial} f))(\zeta)}{\zeta - z}\, d\lambda^2(\zeta)$$

für alle $z \in \Omega$. Wegen $\bar{\partial}(f - (\delta_T \bar{\partial} f))(\zeta) = \delta_T \bar{\partial}^2 f(\zeta)$, ist damit

$$\|f\|_{2,\Omega} \leq \|\delta_T \bar{\partial} f\|_{2,\Omega} + \frac{1}{\pi}\left\|\int_\Omega \frac{\delta_T \bar{\partial}^2 f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\lambda^2(\zeta)\right\|_{2,\Omega}.$$

Um die Norm des letzten Summanden abzuschätzen, ist zu bemerken, daß hier ein Faltungsintegral vorliegt: Mit

$$f_1(z) := \begin{cases} (\delta_T \bar{\partial}^2 f)(z) & , \quad z \in \Omega \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f_2(z) := \begin{cases} 1/z & , \quad z \in (\Omega - \Omega) \setminus \{0\} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

gilt nämlich:

$$-(f_1 * f_2)(z) = \int_\Omega \frac{(\delta_T \bar{\partial}^2 f)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Man beachte noch, daß $f_1 \in L^2(\mathbb{C})$ und $f_2 \in L^1(\mathbb{C}, X)$ ist (siehe 1.1 für die Bezeichnungen). Die Normabschätzung für Faltungen liefert somit

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_{2,\Omega} &\leq \|f_1\|_{2,\Omega}\|f_2\|_{1,\Omega} \\ &= c_\Omega\|\delta_T \bar{\partial}^2 f\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Setzt man noch $C_\Omega := \max\{1, \frac{1}{\pi} c_\Omega\}$, so ist die Behauptung bewiesen. ■

Kombiniert man Lemma 1.6 und 1.4,3, so folgt sofort

Seien $T, S \in L(X)$. Falls eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|(\bar{z} - S)x\| \leq C\|(z - T)x\| \qquad (*)$$

für alle $x \in X$ und $z \in \mathbb{C}$, dann hat T Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$.

Offensichtlich läßt sich diese Aussage auf M-hyponormale Operatoren auf Hilberträumen anwenden: ein Operator $T \in L(H)$ heißt *M-hyponormal*, wenn $\|(\bar{z} - T^*)x\| \leq M\|(z - T)x\|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $x \in H$, und dies erfüllt Bedingung $(*)$.
Im übrigen ist die M-Hyponormalität von T schon gleichbedeutend mit der Positivität des Operators $M^2(\bar{z} - T^*)(z - T) - (z - T)(\bar{z} - T^*)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und durch Minimumbildung kann man daraus die z-freie Bedingung

$$M^2\big(\|Tx\|^2 - |< Tx, x >|^2\big) + |< Tx, x >|^2 - \|T^*x\|^2 \geq 0 \text{ für alle } x \text{ mit } \|x\| = 1$$

erhalten.

1.7 Sei T ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum X. Man nennt T *verallgemeinert skalar*, falls ein stetiger Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{C}) \longrightarrow L(X)$$

existiert, so daß

$$\Phi(1) = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad \Phi(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = T \tag{1.6}$$

ist (dieser Algebrenhomomorphismus ist i.a. nicht eindeutig bestimmt). Man sagt auch, daß der Operator T einen $\mathcal{C}^\infty$-*Kalkül* besitzt. Oft wird Bedingung (1.6) wegen der Homomorphiebedingung auch in der Form

$$\Phi(p) = p(T) \quad \forall \text{ Polynome } p \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$$

geschrieben. Dabei ist $p(T)$ der polynomielle Funktionalkalkül und Φ somit eine Erweiterung von diesem. Φ heißt auch *Spektraldistribution* von T.
Homomorphismen mit (1.6) kann man auch auf anderen Funktionenalgebren $\mathfrak{A}$ betrachten und erhält sog. $\mathfrak{A}$-Funktionalkalküle. Diese Theorie ist eine Verallgemeinerung der klassischen Funktionalkalküle, siehe dazu auch [4].
Ein Beispiel für einen verallgemeinert skalaren Operator liefert etwa die Multiplikation mit der Koordinate auf den Sobolevräumen $W^n(\Omega, X)$ für beschränktes Ω:

$$(Tf)(z) := zf(z), \qquad f \in W^n(\Omega, X).$$

In diesem Fall lautet die Spektraldistribution

$$(\Phi(f))(g) := g \cdot f|_\Omega \quad \text{für } f \in \mathcal{E}(\mathbb{C}), g \in W^n(\Omega, X).$$

Ein Operator $T \in L(X)$ heißt nun *subskalar*, wenn es einen Banachraum $\hat{X}$ und einen verallgemeinert skalaren Operator $\hat{T} \in L(\hat{X})$ gibt, so daß T ähnlich zur Restriktion von $\hat{T}$ auf einen abgeschlossenen invarianten Unterraum von $\hat{X}$ ist.
Den Zusammenhang der Begriffe subskalar und Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ klärt der Satz von Eschmeier und Putinar ([7],[8]):

1.8 (Eschmeier und Putinar) *Ein stetiger linearer Banachraumoperator $T \in L(X)$ ist genau dann subskalar, wenn er die Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ hat.*

Das ist die in der Einleitung angekündigte Charakterisierung von $(\beta)_\mathcal{E}$.

Mit der Bemerkung vor Beginn von 1.7 gelingt damit der Nachweis von $(\beta)_\mathcal{E}$ für eine bestimmte Operatorenklasse:

1.9 *Jeder* M-*hyponormale Operator auf einem Hilbertraum hat $(\beta)_\mathcal{E}$ und damit eine Erweiterung mit $\mathcal{C}^\infty$-Funktionalkalkül.*

Wir werden nun den lokalen Charakter der Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ zeigen.

Der lokale Charakter von $(\beta)_\mathcal{E}$

Zunächst sei ein wohlbekanntes Lemma zitiert, welches im weiteren Verlauf dieses und des nächsten Paragraphen unentwegt benötigt wird und die Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ den Methoden der Analysis leichter zugänglich macht.

1.10 Lemma *Seien E, F (F)-Räume, $T : E \longrightarrow F$ ein stetiger, linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

1. *T ist injektiv mit abgeschlossenem Bild.*
2. *Für jede Folge x_n in E mit $Tx_n \to 0$ gilt schon $x_n \to 0$.*

1.11 Um zu verstehen, was es heißen soll, $(\beta)_\mathcal{E}$ sei lokal, schauen wir nochmals auf die Definition (siehe 1.3): die Abbildung $\alpha_T : \mathcal{E}(U, X) \longrightarrow \mathcal{E}(U, X)$ muß injektiv mit abgeschlossenem Bild sein für alle offenen U in $\mathbb{C}$. Nun hat nicht jeder Operator Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ (siehe 2.3). Allerdings sieht man sofort, daß α_T auf $\mathcal{E}(\rho(T), X)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild ist. Das suggeriert, die Menge

$$M_T := \{\lambda \in \mathbb{C},\ \text{ex. Umgebung } U(\lambda) \text{ mit } \alpha_T : \mathcal{E}(U(\lambda), X) \longrightarrow \mathcal{E}(U(\lambda), X) \\ \text{injektiv mit abgeschlossenem Bild}\ \} \tag{1.7}$$

zu betrachten. Diese ist per Definition offen und enthält die Resolvente $\rho(T)$. $S_T := \mathbb{C} \setminus M_T$ ist also kompakt.
Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ ist nun lokal, wenn aus $M_T = \mathbb{C}$ schon folgt, daß T Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ hat und umgekehrt; letzteres folgt direkt aus der Definition (das einfachste Beispiel einer in diesem Sinne nicht lokalen Eigenschaft ist die Integrierbarkeit).

1.12 Satz *Sei $U \subset M_T$ offen für $T \in L(X)$. Dann ist*

$$\alpha_T : \mathcal{E}(U, X) \longrightarrow \mathcal{E}(U, X)$$

injektiv mit abgeschlossenem Bild.

$\triangleright$**Beweis:** Der Beweis macht von Lemma 1.10 Gebrauch. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}(U, X)$ mit $\alpha_T f_n \to 0$. Zeige: $f_n \to 0$.
$\alpha_T f_n \to 0$ heißt:

$$\|\bar{\partial}^j \alpha_T f_n\|_{2,V} \to 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0, V \subset\subset U. \tag{1.8}$$

Sei $V \subset\subset U$ beliebig aber fest. Zu jedem $\lambda \in V$ existiert nach Voraussetzung eine Umgebung $U(\lambda) \subset M_T \cap U$ wie in (1.7). Da V relativkompakt ist, existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \overline{V}$ mit $V \subset \bigcup_{k=1}^{m} U(\lambda_k)$. Wähle dazu $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen $\{\chi_k\}_{1\le k\le m}$ mit kompakten Trägern

$$\mathrm{supp}\chi_k \subset U(\lambda_k)$$

und $\sum_{k=1}^{m} \chi_k(z) \equiv 1$ auf $\overline{V}$. Dann ist

$$f = \sum_{k=1}^{m} f\chi_k \qquad \text{auf } V \text{ für } f \in \mathcal{E}(U,X)$$

und $f\chi_k$ hat kompakten Träger in $U(\lambda_k)$. Das liefert:

$$\begin{aligned}
\|\bar\partial^j f_n\|_{2,V} &= \|\bar\partial^j \sum_{k=1}^{m} f_n\chi_k\|_{2,V} \\
&\le \sum_{k=1}^{m} \|\bar\partial^j (f_n\chi_k)\|_{2,V} \le \sum_{k=1}^{m} \|\bar\partial^j (f_n\chi_k)\|_{2,\mathrm{supp}\chi_k}. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Wenn wir daher $\alpha_T f_n\chi_k \to 0$ in $\mathcal{E}(U(\lambda_k),X)$ zeigen können für alle $1 \le k \le m$, so konvergiert der rechte Term in (1.9) gegen 0 nach Definition der $U(\lambda_k)$.
Sei also W eine relativkompakte Teilmenge von $U(\lambda_k)$, $r \in \mathbb{N}_0$. Dann ist (beachte (1.4))

$$\begin{aligned}
&\|\bar\partial^r(\alpha_T(f_n\chi_k))\|_{2,W} \le \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \underbrace{\|\bar\partial^s \alpha_T f_n\|_{2,W}}_{\to 0} \|\bar\partial^{(r-s)}\chi_k\|_{2,W} \\
&\to 0 \quad \text{bei } n \to \infty, 1 \le k \le m, \text{ nach (1.8).}
\end{aligned}$$

Unsere Voraussetzung liefert somit $\|\bar\partial^j (f_n\chi_k)\|_{2,\mathrm{supp}\chi_k} \to 0$ bei $n \to \infty$. Mit Hilfe von (1.9) schließen wir: $\|\bar\partial^j f_n\|_{2,V} \to 0$. Da V beliebig war, folgt $f_n \to 0$ in $\mathcal{E}(U,X)$. ■

Im übrigen liefert dieser Satz auch folgende äquivalente Beschreibung der Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$:

T hat $(\beta)_{\mathcal{E}}$, wenn $\alpha_T : \mathcal{E}(\mathbb{C},X) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{C},X)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild ist.

Durch das bisher Gesagte wird die Einführung des folgenden Begriffs motiviert:

1.13 Definition *Sei $T \in L(X)$, $S \subset \mathbb{C}$ kompakt. T hat die* Eigenschaft β_1^S, *falls zu jedem $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ eine Umgebung $U(\lambda) \subset \mathbb{C} \setminus S$ existiert, so daß*

$$\alpha_T : \mathcal{E}(U(\lambda),X) \longrightarrow \mathcal{E}(U(\lambda),X) \qquad (1.10)$$

injektiv mit abgeschlossenem Bild ist.

Wie aus der Defintion folgt, hat jeder Operator die Eigenschaft β_1^S für $S \supset S_T$. Die Bezeichnung dient daher im wesentlichen der Kenntlichmachung der Ausnahmemenge S.

1.14 Es stellt sich nun die Frage, ob man eine dem Satz von Eschmeier und Putinar (1.8) ähnliche Charakterisierung der Operatoren mit Eigenschaft β_1^S finden kann. Sicherlich muß die dabei auftretende Ausnahmemenge in gesonderter Weise behandelt werden. Es zeigt sich, daß folgende Definition (1.15) sehr fruchtbar ist.

Für eine kompakte Teilmenge S in $\mathbb{C}$ setzen wir

$$\mathcal{U}_S := \{U \subset \mathbb{C} \text{ offen, beschränkt}; S \subset U\}$$

und für $U \in \mathcal{U}_S$

$$\mathcal{E}_U(X) := \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{C}, X); \bar{\partial} f \equiv 0 \text{ auf } U\}$$

d.h. die Funktionen in $\mathcal{E}_U(X)$ sind auf U holomorph. Weiter sei $\mathcal{E}_U := \mathcal{E}_U(\mathbb{C})$.

1.15 Definition *Sei $T \in L(X)$, $S \subset \mathbb{C}$ kompakt. T hat die Eigenschaft β_2^S, wenn $\alpha_T : \mathcal{E}_U(X) \longrightarrow \mathcal{E}_U(X)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild ist für alle $U \in \mathcal{U}_S$.*

In dieser Definition trägt $\mathcal{E}_U(X)$ die Relativtopologie von $\mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$. Damit wird dieser Raum wieder zu einem (F)-Raum, denn $\mathcal{E}_U(X)$ ist abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$ nach dem Weierstraßschen Satz über die lokal gleichmäßige Konvergenz holomorpher Funktionenfolgen.

Daß wir hier eigentlich nichts Neues definiert haben, sagt uns

1.16 Satz *Die Eigenschaften β_1^S und β_2^S sind äquivalent.*

$\triangleright$**Beweis:**
a) $\beta_1^S \Rightarrow \beta_2^S$: Sei $U \in \mathcal{U}_S$ beliebig aber fest. Da $\mathcal{E}_U(X)$ ein (F)-Raum ist, können wir Lemma 1.10 anwenden. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}_U(X)$ mit $\alpha_T f_n \to 0$ in $\mathcal{E}_U(X)$. Nach Definition der Topologie heißt das:

$$\|\bar{\partial}^j \alpha_T f_n\|_{2,V} \to 0 \quad \text{für alle}\, V \subset\subset \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}_0.$$

Das bedeutet insbesondere, daß $\alpha_T(f_n|_W) \to 0$ in $\mathcal{E}(W, X)$ für $W \subset\subset \mathbb{C} \setminus S$. Mit Voraussetzung β_1^S und Satz 1.12 (denn $\mathbb{C} \setminus S \subset M_T$) folgt dann

$$f_n|_W \to 0 \text{ in } \mathcal{E}(W, X). \tag{1.11}$$

Ist $V \subset\subset U$, dann ist $\|\bar{\partial}^j f_n\|_{2,V} = 0$ für $j \geq 1$. Für $j = 0$ wähle man eine geschlossene Kurve Γ in $U \setminus S$, die V umläuft. Dann gilt $\|f_n\|_{2,\Gamma} \to 0$ (da Γ kompakte Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus S$ ist und (1.11) gilt). Nun können wir die Äquivalenz der beiden Topologien (1.1) und (1.2) auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C} \setminus S, X)$ ausnutzen: Wir haben gerade gesehen, daß $f_n|_{\mathbb{C}\setminus S} \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{C} \setminus S, X)$, und das ist gleichbedeutend mit (siehe (1.1))

$$\sup_{z\in W} \|D^\alpha f_n(z)\| \to 0 \quad \text{für alle } W \subset \mathbb{C} \setminus S \text{ kompakt.}$$

Das heißt für $W = \Gamma$ und $\alpha = (0, 0)$:

$$\sup_{z\in\Gamma} \|f_n(z)\| \to 0.$$

Nach dem Maximumsprinzip folgt daher für jede kompakte Menge $M \subset U$, die von Γ umlaufen wird (insbesondere für V):

$$\sup_{z\in M} \|f_n(z)\| \leq \sup_{z\in\Gamma} \|f_n(z)\| \to 0.$$

Aber es ist

$$\|f_n\|_{2,V} = \left(\int_V \|f_n(z)\|^2 \, dz\right)^{\frac{1}{2}} \leq (\mathrm{vol}(V))^{\frac{1}{2}} \sup_{z\in V} \|f_n(z)\|.$$

Daher $\|\bar{\partial}^j f_n\|_{2,V} \to 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. und damit

$$f_n|_U \to 0 \text{ in } \mathcal{E}(U, X). \tag{1.12}$$

Zusammengenommen ergeben (1.11) und (1.12) $f_n \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$ und daher in $\mathcal{E}_U(X)$.

b) $\beta_2^S \Rightarrow \beta_1^S$: Wir wenden wieder Lemma 1.10 an. Sei dazu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}(\mathbb{C}\setminus S, X)$ mit $\alpha_T f_n \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{C}\setminus S, X)$. Nach Definition heißt das:

$$\|\bar\partial^j \alpha_T f_n\|_{2,V} \to 0 \quad \text{bei}\, n\to\infty \tag{1.13}$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und $V \subset\subset \mathbb{C}\setminus S$. Wir zeigen: $f_n \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{C}\setminus S, X)$.
Zu $V \subset\subset \mathbb{C}\setminus S$ wähle $U \in \mathcal{U}_S$ mit $U\cap V = \emptyset$, dazu eine Funktion $\chi_U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ mit

$$\operatorname{supp}\chi_U \subset U \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}(1-\chi_U)\cap U' = \emptyset \tag{1.14}$$

für ein $U' \subset\subset U$, $U' \in \mathcal{U}_S$ (die zweite Bedingung besagt, daß χ_U auf einer Umgebung von U' konstant Eins ist). Um die Voraussetzung β_2^S anwenden zu können, brauchen wir Funktionen, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert sind. Daher setzen wir:

$$f_n^*(z) := \begin{cases} f_n(z) & , \quad z\in\mathbb{C}\setminus S \\ 0 & , \quad z\in S \end{cases}$$

Dann ist offensichtlich $f_n^*(1-\chi_U) \in \mathcal{E}_{U'}(X)$. Wir behaupten:

$$\alpha_T(f_n^*(1-\chi_U)) \to 0 \quad \text{in}\, \mathcal{E}_{U'}(X). \tag{1.15}$$

Dazu sei $W \subset\subset \mathbb{C}, j\in\mathbb{N}_0$. Dann ist (mit $M := W\cap \operatorname{supp}(1-\chi_U) \subset\subset \mathbb{C}\setminus S$)

$$\begin{aligned} \|\bar\partial^j\alpha_T(f_n^*(1-\chi_U))\|_{2,W} &= \|\bar\partial^j\alpha_T(f_n(1-\chi_U))\|_{2,M} \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (\bar\partial^k\alpha_T f_n)(\bar\partial^{(j-k)}(1-\chi_U)) \right\|_{2,M} \\ &\le \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} \|\bar\partial^k \alpha_T f_n\|_{2,M}\|\bar\partial^{(j-k)}(1-\chi_U)\|_{2,M}. \end{aligned}$$

Da $M \subset\subset \mathbb{C}\setminus S$, liefert Voraussetzung (1.13), daß der letzte Ausdruck gegen 0 konvergiert und somit gilt (1.15). Mit β_2^S haben wir daher: $f_n^*(1-\chi_U) \to 0$ in $\mathcal{E}_{U'}(X)$.
Insbesondere gilt also für V:

$$\|\bar\partial^j f_n^*(1-\chi_U)\|_{2,V} = \|\bar\partial^j f_n(1-\chi_U)\|_{2,V} \to 0.$$

Aber auf V ist $1-\chi_U \equiv 1$ (siehe (1.14)), also $\|\bar\partial^j f_n\|_{2,V}\to 0$.
Da V beliebig war, folgt die Behauptung. ■

1.17 Es soll nun kurz motiviert werden, warum wir gerade die Räume $\mathcal{E}_U(X)$ betrachten. Wie schon erwähnt, hat jeder Operator $T\in L(X)$ die Eigenschaft $\beta_2^{\sigma(T)}$. Daher ist $\alpha_T(\mathcal{E}_U(X))$ abgeschlossen in $\mathcal{E}_U(X)$ für $U\in\mathcal{U}_{\sigma(T)}$. Betrachten wir die Abbildung

$$\psi_U : X \longrightarrow \mathcal{E}_U(X)/\alpha_T(\mathcal{E}_U(X)), \qquad x\mapsto [1\otimes x],$$

([..] ist die Klasse im Quotienten und $f\otimes x$ die Abbildung $z\mapsto f(z)\,x$ für eine skalare Funktion f), so ist dies ein topologischer Isomorphismus (rechts steht ein vollständiger Raum!), und daher kann man für $f\in\mathcal{E}_U$ definieren:

$$f(T)\,x := \psi^{-1}([f\otimes x]).$$

Dies liefert einen stetigen linearen Operator $f(T)$ auf X und die Zuordnung $f \mapsto f(T)$ von $\mathcal{E}_U$ nach $L(X)$ ist eine Algebrenhomomorphismus. Das sieht man sofort ein, wenn man beachtet, daß ψ^{-1} gerade gegeben ist durch

$$\psi^{-1}([f]) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-T)^{-1} f(z)\,dz;$$

also im wesentlichen der analytische Funktionalkalkül. Solche $\mathcal{E}_U$-Funktionalkalküle sind tatsächlich auch bei allgemeinem S der richtige Ersatz für die Skalarität.

$\beta_2^S \Rightarrow$ residualsubskalar

Die nachfolgenden Aussagen sind praktische Hilfsmittel beim Beweis des ersten Haupsatzes.

1.18 Lemma *Sei E ein (F)-Raum mit erzeugendem Halbnormensystem $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sei E_1 ein abgeschlossener Unterraum von E. Wenn für eine Folge $\{x_k\}$ in E gilt*

$$\inf\{p_n(x_k+y); y\in E_1\}\to 0 \quad \textit{bei} \quad k\to\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}, \tag{1.16}$$

dann existiert eine Folge $\{y_k\}$ in E_1 mit

$$p_n(x_k+y_k)\to 0 \quad \textit{bei} \quad k\to\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

▷**Beweis:** Auf E ist durch

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

eine translationsinvariante, vollständige Metrik gegeben. Dann ist

$$\rho([x],[y]) := \inf\{d(x-y,z); z\in E_1\}$$

eine translationsinvariante vollständige Metrik auf E/E_1, die die Quotiententopologie erzeugt (siehe [24], Theorem 1.41).
Da (1.16) nichts anders besagt, als $[x_k]\to 0$ in E/E_1, folgt sofort

$$\rho([x_k],0)\to 0 \quad \text{bei } k\to\infty.$$

Dann findet man mit Diagonalverfahren eine Folge $\{y_k\}$ in E_1 mit

$$d(x_k,-y_k)\to 0,$$

was gleichbedeutend ist mit $p_n(x_k+y_k)\to 0$ bei $k{\to}\infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$. ■

Zwei direkte Folgerungen können aus diesem Lemma gezogen werden (die Räume $\mathcal{O}(U,X)$ wurden in der Einleitung definiert).

1.19 Korollar *Es sei $R: X \longrightarrow Y$ ein stetiger linearer Operator zwischen zwei (F)-Räumen. Ist R surjektiv und $\{y_n\}$ eine Folge in Y mit $y_n\to 0$, dann existiert eine Folge $\{x_n\}$ in X mit $Rx_n = y_n$ für alle n und $x_n\to 0$.*

1.20 Korollar *Sei $\Omega\subset\mathbb{C}$ offen, sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}(\Omega,X)$ mit $\bar\partial g_n\to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega,X)$. Dann existiert eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{O}(\Omega,X)$ mit $h_n-g_n\to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega,X)$.*

▷**Beweis:**
Betrachte die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega, X) \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}(\Omega, X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}(\Omega, X) \longrightarrow 0,$$

wobei ι die Einbettung bezeichne. Da der $\bar\partial$-Operator hier surjektiv ist (siehe [8], Lemma 6.2.2) folgt die Exaktheit dieser Sequenz und mit Korollar 1.19 die Behauptung. ■

1.21 Für das Folgende definieren wir:

$$W_U^k(\Omega, X) := \{f \in W^k(\Omega, X); \bar\partial f \equiv 0 \,\text{auf}\; U\}$$

für $U, \Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $U \subset\subset \Omega$. Diese sind abgeschlossene Unterräume von $W^k(\Omega, X)$. Für $\varepsilon > 0$ und U offen sei

$$U_\varepsilon := \{\lambda \in U, dist(\lambda, \partial U) > \varepsilon\}.$$

1.22 Lemma *Seien $\Omega, U \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt, $U \subset\subset \Omega$, $f \in W_U^k(\Omega, X)$ mit kompaktem Träger in Ω. Dann existiert zu jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega, X) \cap (\mathcal{E}_{U_\varepsilon}(X)|_\Omega)$ mit*

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_{W^n(\Omega,X)} < \delta.$$

▷**Beweis:** (Für die Aussagen bez. der Glättung, die im Beweis vorkommen, siehe etwa [30], §1.3.) Sei f wie im Satz gefordert. Dann ist die triviale Fortsetzung

$$\tilde f(z) := \begin{cases} f(z) & , \quad z \in \Omega \\ 0 & , \quad z \notin \Omega \end{cases}$$

eine Funktion in $W_U^k(\mathbb{C}, X)$ (der kompakte Träger ist hierzu wesentlich) und es ist $\bar\partial \tilde f = \widetilde{\bar\partial f}$. Wenn ρ_ε wie üblich die sog. Glättungsfunktion

$$\rho_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-1} \begin{cases} \exp((1 - |z/\varepsilon|^2)^{-1}) & , \quad |z| \le \varepsilon \\ 0 & , \quad |z| > \varepsilon \end{cases}$$

bezeichnet, so hat man für $0 \le j \le n$:

$$(\bar\partial^j(\tilde f * \rho_\varepsilon))|_\Omega = ((\bar\partial^j \tilde f) * \rho_\varepsilon)|_\Omega \to \bar\partial^j f \quad \text{in}\, L^2(\Omega, X) \text{ bei } \varepsilon \to 0.$$

Außerdem ist $(\tilde f * \rho_\varepsilon)|_\Omega \in \mathcal{D}(\Omega, X)$. Also hat man schon

$$\varphi_\varepsilon := (\tilde f * \rho_\varepsilon)|_\Omega \to f \quad \text{in}\, W^n(\Omega, X).$$

Weiterhin ist für $z \in U_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \bar\partial(\tilde f * \rho_\varepsilon)(z) &= (\bar\partial \tilde f) * \rho_\varepsilon(z) \\ &= \int_\Omega \widetilde{\bar\partial f}(z - w) \rho_\varepsilon(w)\, dw = 0, \end{aligned}$$

denn für $w \in B_\varepsilon(0)$ ist $z - w$ in U und dort ist $\bar\partial f$ identisch 0. ■

Bemerkung 1: Der Leser schaue sich hierzu auch Lemma A4.3 im Appendix 4 von [8] an.
Bemerkung 2: Aus dem Beweis ist sofort ersichtlich, daß man für $\delta_1 < \delta_2$ schon $\varepsilon(\delta_1) < \varepsilon(\delta_2)$ wählen kann.

Schließlich benötigen wir noch einen Satz aus der Theorie der lokalkonvexen Vektorräume (siehe etwa [21], Satz 22.6 oder [32], Satz VIII.2.3).

1.23 *Seien X,Y lokalkonvexe Vektorräume mit erzeugenden Halbnormensystemen P,Q. Eine lineare Abbildung $T : E \longrightarrow F$ ist genau dann stetig, wenn zu jedem $q \in Q$ endlich viele $p_1, ..., p_n \in P$ und $C > 0$ existieren mit*

$$q(Tx) \leq C \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \qquad \forall x \in X.$$

Nun können wir die Richtung $(\beta)_{\mathcal{E}} \Rightarrow$ *subskalar* aus Satz 1.8 auf den allgemeinen Fall ausdehnen.

Seien $S, T \in L(X)$. Wir schreiben $S \sim T$, wenn S und T ähnlich sind. Desweiteren bezeichne $\mathrm{Lat}(T)$ die Menge aller Räume, die mittels einer stetigen Einbettung mit einem abgeschlossenen, unter T invarianten Unterraum von X identifiziert werden können.

1.24 Satz *Sei $S \subset \mathbb{C}$ kompakt, $T \in L(X)$ mit Eigenschaft β_2^S. Dann existiert zu jedem $U \in \mathcal{U}_S$ ein Banachraum X_U, ein Operator $S_U \in L(X_U)$ und ein stetiger Algebrenhomomorphismus $\Phi_U : \mathcal{E}_U \longrightarrow L(X_U)$ mit $X \in \mathrm{Lat}(S_U)$, $S_U|_X \sim T$ und $\Phi_U(1) = \mathrm{id}_{X_U}, \Phi_U(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = S_U$.*

Wir sagen auch, ein Operator mit Eigenschaft β_2^S ist *residualsubskalar* (in Anlehnung an residualzerlegbar nach Vasilescu).

▷**Beweis:** Der Beweis besteht aus 3 Schritten.
1.Schritt: Wir zeigen: Für alle $U \in \mathcal{U}_S$ ist

$$J_U : X \longrightarrow Y_U := \mathcal{E}_U(X)/\alpha_T\mathcal{E}_U(X) \quad , \quad x \mapsto [1 \otimes x]$$

injektiv mit abgeschlossenem Bild. Dabei steht $1 \otimes x$ für die Funktion, die jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ den Wert x zuordnet und $[\cdot\cdot]$ bezeichnet die Äquivalenzklasse.
Da $\alpha_T\mathcal{E}_U(X)$ abgeschlossen ist, ist Y_U ein (F)-Raum mit definierendem Halbnormensystem ([29], Prop. 7.9)

$$\tilde{p}_{m,k}([f]) := \inf\{p_{m,k}(f + \alpha_T g), g \in \mathcal{E}_U(X)\},$$

wobei $\{p_{m,k}\}_{m,k\in\mathbb{N}_0}$ ein erzeugendes Halbnormensystem von $\mathcal{E}_U(X)$ ist wie in (1.2):

$$p_{m,k}(f) = \|\bar{\partial}^k f\|_{2,V_m} \quad , \quad \{V_m\}_{m\in\mathbb{N}_0} \text{ kompakte Ausschöpfung von } \mathbb{C}.$$

Wir wenden wieder Lemma 1.10 an. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $J_U x_n \to 0$. Zu zeigen: $x_n \to 0$. $J_U x_n \to 0$ heißt: $\tilde{p}_{m,k}([1 \otimes x_n]) \to 0$ für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$ (siehe etwa [10], Kap. 4.3). Nach Definition der $\tilde{p}_{m,k}$ bedeutet dies:

$$\inf\{\|\bar{\partial}^k(1 \otimes x_n + \alpha_T g)\|_{2,V_m}, g \in \mathcal{E}_U(X)\} \to 0 \quad \forall m, k \in \mathbb{N}_0,$$

An dieser Stelle benötigen wir Lemma 1.18. Es existiert danach eine Folge von Funktionen g_n in $\mathcal{E}_U(X)$ mit

$$\|\bar{\partial}^k(1 \otimes x_n + \alpha_T g_n)\|_{2,V_m} \to 0 \quad \forall m, k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.17}$$

das heißt

$$1 \otimes x_n + \alpha_T g_n \to 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{E}_U(X).$$

Aus (1.17) folgt insbesondere, daß $\alpha_T\bar{\partial}g_n = \bar{\partial}(\alpha_T g_n) \to 0$ in $\mathcal{E}_U(X)$ und Voraussetzung β_2^S liefert $\bar{\partial}g_n \to 0$ in $\mathcal{E}_U(X)$.
Lemma 1.20 gibt uns also eine Folge $h_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, X)$ mit

$$g_n - h_n \to 0 \text{ in } \mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$$

und damit

$$1 \otimes x_n + \alpha_T h_n = 1 \otimes x_n + \alpha_T (h_n - g_n) + \alpha_T g_n \to 0 \tag{1.18}$$

in $\mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$, sogar in $\mathcal{O}(\mathbb{C}, X)$.
Um daraus $x_n \to 0$ zu folgern, benötigen wir den vektorwertigen holomorphen Funktionalkalkül
:

$$\gamma : \mathcal{O}(\mathbb{C}, X) \longrightarrow X \quad , \quad \gamma(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z - T)^{-1} f(z)\, dz.$$

Dabei sei Γ eine geschlossene Kurve, die das Spektrum $\sigma(T)$ einmal positiv umlaufe. Da γ stetig ist und $\gamma(1 \otimes x_n + \alpha_T h_n) = x_n$, folgt mit (1.18)

$$x_n = \gamma(1 \otimes x_n + \alpha_T h_n) \to \gamma(0) = 0.$$

Dies beendet den Beweis des ersten Schrittes.

2.Schritt: Da die Y_U (F)-Räume sind und das Bild von J_U abgeschlossen ist, liefert der Satz von der offenen Abbildung, daß die Umkehrabbildung von J_U auf $J_U(X)$ stetig ist.
Mit $T = J_U^{-1}$ liefert 1.23 für alle $x \in X$

$$\|x\| \leq C_U^* \sum_{endl.} \tilde{p}_{m,k}([1 \otimes x]). \tag{1.19}$$

Dabei durchlaufen die Indices (m, k) eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq C_U^* \sum_{endl.} \inf\{p_{m,k}(1 \otimes x + \alpha_T g); g \in \mathcal{E}_U(X)\} \\ &\leq C_U^* \inf \left\{ \sum_{endl.} \|\bar{\partial}^k (1 \otimes x + \alpha_T g)\|_{2,V_m}; g \in \mathcal{E}_U(X) \right\} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Es bezeichne Ω_U eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die sowohl alle Mengen V_m aus der Summe (1.20) als auch U und $\sigma(T)$ relativkompakt enthält. Desweiteren sei

$$\begin{aligned} C_U' &:= C_U^* \sharp\{m \in \mathbb{N}_0, (m, k) \in M\} \text{ und} \\ n(U) &\geq \max\{k \in \mathbb{N}_0, (m, k) \in M\}. \end{aligned}$$

Damit können wir weiter schreiben

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq C_U' \inf \left\{ \sum_{k=0}^{n(U)} \|\bar{\partial}^k (1 \otimes x + \alpha_T g)\|_{2,\Omega_U}; g \in \mathcal{E}_U(X) \right\} \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} C_U \inf\{\|1 \otimes x + \alpha_T g\|_{W^{n(U)}(\Omega_U, X)}; g \in \mathcal{E}_U(X)\}, . \end{aligned} \tag{1.21}$$

mit $C_U = C_U' \sqrt{n(U)}$. Man beachte besonders die Abhängigkeit der Konstanten C, Ω und n von U und die Möglichkeit, die Größen $n(U)$ und Ω_U beliebig zu vergrößern, ohne die Ungleichung zu beeinträchtigen! Ergebnis (1.21) werden wir zum Beweis der nächsten Aussage benötigen.
Wir behaupten:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_U : X &\longrightarrow X_U := W_U^{n(U)}(\Omega_U, X) / \overline{\alpha_T W_U^{n(U)}(\Omega_U, X)} \\ x &\longmapsto [1 \otimes x] \end{aligned}$$

ist injektiv mit abgeschlossenem Bild.

Beachte, daß der Operator α_T jetzt auf einer anderen Funktionenklasse agiert, nämlich auf $W_U^{n(U)}(\Omega_U, X)$ (siehe Bemerkung nach Definition 1.2).
Wieder kommt Lemma 1.10 zum Zug, da X_U ein Banachraum ist. Sei also x_n eine Folge in X mit $[1 \otimes x_n] \to 0$, oder gleichbedeutend $1 \otimes x_n - \alpha_T f_n \to 0$ in $W_U^{n(U)}(\Omega_U, X)$ für eine Folge $f_n \in W_U^{n(U)}(\Omega_U, X)$ (die Existenz der Folge wurde schon in 1.18 gezeigt; in normierten Räumen ist dies aber ohnehin offensichtlich). Wir wollen die f_n durch Funktionen aus $\mathcal{E}_U(X)$ ersetzen und dann (1.21) anwenden, um $x_n \to 0$ zu erhalten.
Sei dazu $\theta \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $\theta \equiv 0$ auf $U \cup \sigma(T)$ und $1 - \theta \in \mathcal{D}(\Omega_U)$. Betrachte die Abbildung

$$H : \Omega_U \longrightarrow L(X) \quad , \quad H(z)(x) := (1 - \theta(z))x.$$

H ist eine Funktion in $\mathcal{D}(\Omega_U, L(X))$. Wir schreiben für die folgende Überlegung H in der Form:

$$H = \mathrm{id} - \alpha_T(\theta R(.,T))\mathrm{id},$$

also

$$H(z)(x) = x - \alpha_T(\theta(z) R(z,T)x).$$

Dabei setzen wir $\theta(z)R(z,T) = 0$ für $z \in \sigma(T)$ und damit ist $\theta R(.,T)x \in \mathcal{E}(\Omega, X)$. Weiterhin betrachten wir die Abbildung

$$Hf_n : \Omega_U \longrightarrow X \quad , \quad (Hf_n)(z) = H(z)f_n(z).$$

Als Produkt einer glatten Funktion und einer W^k-Funktion ist Hf_n wieder in $W^{n(U)}(\Omega, X)$. Weiterhin gilt auf U schon $Hf_n = f_n$ und daher ist $Hf_n \in W_U^{n(U)}(\Omega_U, X)$. Dann ist

$$\begin{aligned} & 1 \otimes x_n - \alpha_T(\theta R(.,T)x_n + Hf_n) \\ = \quad & (1-\theta)(1 \otimes x_n - \alpha_T f_n) \to 0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

in $W^{n(U)}(\Omega, X)$ (Multiplikation mit $(1 - \theta)$ ist stetig).
Aus der Definition ist sofort zu erkennen, daß Hf_n kompakten Träger in Ω_U hat. Somit ist Lemma 1.22 anwendbar. Danach existiert eine monoton fallende Nullfolge $\{\varepsilon(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ schon $U_{\varepsilon(n)} \in \mathcal{U}_S$ und ein $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega_U, X) \cap \mathcal{E}_{U_{\varepsilon(n)}}(X)|_{\Omega_U}$ existiert mit

$$\|Hf_n - \varphi_n\|_{W^{n(U)}(\Omega_U, X)} \leq \frac{1}{n}. \tag{1.23}$$

Die Konstruktion zu Beginn von Schritt 2 erlaubt es, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ zu finden mit

$$n(U_{\varepsilon(n_0)}) \leq n(U) \quad \text{und} \quad \Omega_{U_{\varepsilon(n_0)}} \subset \Omega_U \tag{1.24}$$

(man kann ja $n(U), \Omega_U$ beliebig vergrößern). Dann ist wegen

$$\mathcal{E}_{U_{\varepsilon(n)}} \subset \mathcal{E}_{U_{\varepsilon(n-1)}} \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{U_{\varepsilon(n_0)}} \quad \forall n \geq n_0$$

schon

$$\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega_U, X) \cap \mathcal{E}_{U_{\varepsilon(n_0)}}|_{\Omega_U} \quad \forall n \geq n_0.$$

Mit Ungleichung (1.21) für $U_{\varepsilon(n_0)}$ statt U (beachte $U_{\varepsilon(n_0)} \in \mathcal{U}_S$) hat man dann für $n \geq n_0$ (hier steht $\Box$ für $U_{\varepsilon(n_0)}$):

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq C_\Box \inf\{\|1 \otimes x_n - \alpha_T g\|_{W^{n(\Box)}(\Omega_\Box, X)}; g \in \mathcal{E}_\Box(X)\} \\ &\leq C_\Box \inf\{\|1 \otimes x_n - \alpha_T g\|_{W^{n(U)}(\Omega_U, X)}; g \in \mathcal{E}_\Box(X)\} \\ &\leq C_\Box \|1 \otimes x_n - \alpha_T \underbrace{(\theta R(.,T)x_n + \varphi_n)}_{\in \mathcal{E}_\Box(X)}\|_{W^{n(U)}(\Omega_U, X)}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

((1.25) folgt aus (1.24).)
Dabei denke man sich die Abbildungen φ_n außerhalb von Ω_U durch 0 fortgesetzt, was wegen des kompakten Trägers ohne Schaden möglich ist.
Der letzte Term konvergiert aber gegen Null, denn

$$\begin{aligned} & \|1 \otimes x_n - \alpha_T(\theta R(.,T)x_n + \varphi_n)\| \\ \leq \; & \underbrace{\|1 \otimes x_n - \alpha_T(\theta R(.,T)x_n + Hf_n)\|}_{\to 0 \text{ nach } (1.22)} + \underbrace{\|\alpha_T(\varphi_n - Hf_n)\|}_{\leq \text{const} \frac{1}{n} \text{ nach } (1.23)} \end{aligned}$$

Damit haben wir $\|x_n\| \to 0$, und das beendet Schritt 2.

3.Schritt: Auf X_U betrachten wir den Operator der Multiplikation mit der Variablen auf Ω_U:

$$S_U : X_U \longrightarrow X_U \quad , \quad [f] \mapsto [zf]$$

Man überzeugt sich schnell davon, daß diese Abbildung wohldefiniert ist. Wir wollen zeigen: $\tilde{J}_U(X) \in \mathrm{Lat}(S_U)$.
Daß $\tilde{J}_U(X)$ abgeschlossen ist, haben wir bereits in Schritt 2 gesehen. Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} (S_U \tilde{J}_U)(x) &= S_U([1 \otimes x]) \\ &= [z(1 \otimes x)] = [z \mapsto zx] \end{aligned} \tag{1.26}$$

und

$$\begin{aligned} (\tilde{J}_U T)(x) &= \tilde{J}_U(Tx) \\ &= [z \mapsto Tx] = [(z \mapsto Tx - zx) + (z \mapsto zx)] \\ &= [z \mapsto zx] \end{aligned} \tag{1.27}$$

Damit ist $(S_U \tilde{J}_U)(x) \in \tilde{J}_U(X)$ und deshalb $\tilde{J}_U(X) \in \mathrm{Lat}(S_U)$. Außerdem folgt aus (1.26) und (1.27) $T = (\tilde{J}_U)^{-1} S_U|_{\tilde{J}_U(X)} \tilde{J}_U$, also $T \sim S_U|_{\tilde{J}_U(X)}$.
Für Φ_U können wir nun setzen:

$$\begin{aligned} \Phi_U : \mathcal{E}_U &\longrightarrow L(X_U) \\ f &\mapsto \Phi_U(f) \quad \text{mit} \quad \Phi_U(f)([g]) := [(f|_{\Omega_U})g]. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist Φ_U ein Algebrenhomomorphismus und $\Phi_U(1) = \mathrm{id}_{X_U}$, $\Phi_U(\mathrm{id}_X) = S_U$. Zur Stetigkeit von $\Phi_U(f)$ (dabei steht $\Box$ für $W^{n(U)}(\Omega_U, X)$):

$$\begin{aligned} \|\Phi_U(f)([g])\|_{X_U} &= \|[(f|_{\Omega_U})g]\|_{X_U} \\ &= \inf\{\|(f|_{\Omega_U})g + \alpha_T h\|_\Box ; h \in W_U^{n(U)}(\Omega_U, X)\} \\ &\leq \inf\{\|(f|_{\Omega_U})g\|_\Box + \|\alpha_T h\|_\Box ; h \in W_U^{n(U)}(\Omega_U, X)\} \\ &\leq \|f\|_\Box \|g\|_\Box + \underbrace{\inf\{\|\alpha_T h\|_\Box ; h \in W_U^{n(U)}(\Omega, X)\}}_{=0} \\ &= \|f\|_\Box \|g\|_\Box . \end{aligned} \tag{1.28}$$

Außerdem liefert (1.28): $\|\Phi_U(f)\| \leq \|f\|_{W^{n(U)}(\Omega_U,X)}$, was die Stetigkeit von Φ_U zeigt.
Damit ist der Beweis von Satz 1.24 abgeschlossen. ■

Die Umkehrung von Satz 1.24

Auch die Aussage *subskalar* $\Rightarrow (\beta)_{\mathcal{E}}$ läßt sich verallgemeinern. Die dazu benötigten Vorbereitungen stammen aus der Theorie der spektralen Kapazitäten (siehe auch Paragraph 4). Wir formulieren sie direkt für unseren Gebrauch.

1.25 Lemma *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt, X ein Banachraum und $\Phi : \mathcal{E}_U \longrightarrow L(X)$ ein Algebrenhomomorphismus mit $\Phi(1) = \mathrm{id}_X$ und $T := \Phi(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$. Weiterhin sei für eine abgeschlossene Teilmenge F in $\mathbb{C}$*

$$\mathcal{B}_\Phi(F) := \bigcap \{\ker \Phi(f); \mathrm{supp} f \cap F = \emptyset\}.$$

Dann gilt ist $\mathcal{B}_\Phi(F)$ invarianter abgeschlossener Unterraum von T und $\sigma(T|\mathcal{B}_\Phi(F)) \subset F$, falls $\overline{U} \subset F$ oder $\overline{U} \cap F = \emptyset$.

$\triangleright$**Beweis:** Da T mit allen $\Phi(f)$ vertauscht, ist $\mathcal{B}_\Phi(F)$ invariant unter T (und als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen). Sei z_0 ein Punkt außerhalb von F.
1.Fall: $\overline{U} \subset F$. Wir betrachten eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion χ mit kompaktem Träger, so daß $z_0 \notin \mathrm{supp}\chi$ und $\mathrm{supp}(1-\chi) \cap F = \emptyset$. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{B}_\Phi(F)$: $\Phi(1-\chi)x = 0$.
Beachtet man $\chi(z_0 - \cdot)^{-1} \in \mathcal{E}_U$, so folgt

$$\begin{aligned}(z_0 - T)\Phi\left(\frac{\chi}{z_0 - \cdot}\right)x &= \Phi(z_0 - \cdot)\Phi\left(\frac{\chi}{z_0 - \cdot}\right)x \\ &= \Phi(\chi)x \\ &= \Phi(\chi)x + \Phi(1-\chi)x = x \quad \forall x \in \mathcal{B}_\Phi(F).\end{aligned}$$

Das heißt aber $z_0 \in \rho(T|\mathcal{B}_\Phi(F))$.

2.Fall: $\overline{U} \cap F = \emptyset$. Wir verwenden wieder die Funktion χ von oben, die jetzt allerdings noch zusätzlich $\mathrm{supp}\chi \cap (\overline{U} \cup \{z_0\}) = \emptyset$ erfüllen soll. Dieselbe Überlegung wie oben liefert $z_0 \in \rho(T|\mathcal{B}_\Phi(F))$. ■

1.26 Lemma *Seien W_1 und W_2 offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $U \subset\subset W_1 \subset\subset W_2$. Dann gilt in der Situation von Lemma 1.25:*

$$X = \mathcal{B}_\Phi(\overline{W}_2) + \mathcal{B}_\Phi(\mathbb{C} \setminus W_1).$$

$\triangleright$**Beweis:** Wähle $\mathcal{C}^\infty$-Funktion χ mit $\mathrm{supp}\chi \subset W_2$ und $\mathrm{supp}(1-\chi) \cap W_1 = \emptyset$. Dann sind χ und $1-\chi$ in $\mathcal{E}_U$ und es gilt

$$x = \mathrm{id}x = \Phi(1)x = \Phi(\chi + (1-\chi))x = \Phi(\chi)x + \Phi(1-\chi)x$$

Wir zeigen:

$$\Phi(1-\chi)x \in \mathcal{B}_\Phi(\mathbb{C} \setminus W_1) \quad \text{und} \quad \Phi(\chi)x \in \mathcal{B}_\Phi(\overline{W}_2). \tag{1.29}$$

Sei $f \in \mathcal{E}_U$ mit $\mathrm{supp} f \cap (\mathbb{C} \setminus W_1) = \emptyset$. Dann

$$\begin{aligned}&\Phi(f)\Phi(1-\chi)x \\ =\ &\Phi(f(1-\chi))x = \Phi(0)x = 0\end{aligned}$$

Für $f \in \mathcal{E}_U$ mit supp$f \cap \overline{W}_2 = \emptyset$ gilt entsprechend:

$$\Phi(f)\Phi(\chi)x = 0.$$

Damit ist (1.29) gezeigt. ∎

Nun können wir die Rückrichtung von Satz 1.24 beweisen.

1.27 Satz *Sei $T \in L(X)$. Für jedes $U \in \mathcal{U}_S$ existiere eine Erweiterung von T, die einen $\mathcal{E}_U$-Kalkül besitzt, d.h. es existiere ein stetiger Algebrenhomomorphismus $\Phi_U : \mathcal{E}_U \longrightarrow L(X_U)$ mit $X \in \mathrm{Lat}(\Phi_U(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}))$ und $\Phi_U(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})|_X = T$. Dann hat T Eigenschaft β_1^S.*

▷**Beweis:** Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S$ beliebig, $V(z_0)$ eine Umgebung von z_0 mit $\overline{V(z_0)} \cap S = \emptyset$. Wir zeigen:

$$\alpha_T : \mathcal{E}(V(z_0), X) \longrightarrow \mathcal{E}(V(z_0), X)$$

ist injektiv mit abgeschlossenem Bild.
Sei dazu $U \in \mathcal{U}_S$ mit $\overline{U} \cap \overline{V(z_0)} = \emptyset$, sei $\{f_n\}$ eine Folge in $\mathcal{E}(V(z_0), X)$ mit $\alpha_T f_n \to 0$. Zeige: $f_n \to 0$.
Nach Voraussetzung existiert ein Banachraum X_U und darauf ein Operator $S_U := \Phi_U(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ mit $X \in \mathrm{Lat}(S_U)$. Wir wollen daher im folgenden die Funktionen in $\mathcal{E}(V(z_0), X)$ als X_U-wertig ansehen.
Seien W_1 und W_2 zwei offene Mengen in $\mathbb{C}$ mit $U \subset\subset W_1 \subset\subset W_2$ und $\overline{V(z_0)} \cap \overline{W}_2 = \emptyset$. Wir behaupten:

$$S_U|\mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1) \text{ ist verallgemeinert skalar.} \tag{1.30}$$

Wir betrachten eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion ψ mit supp$\psi \subset W_1$ und supp$(1-\psi) \cap U = \emptyset$ (damit ist $\psi \in \mathcal{E}_U$!). Definiere

$$\begin{array}{rcl} \Delta_U : \mathcal{E}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & L(\mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1)) \\ f & \mapsto & \Delta_U(f) := \Phi_U((1-\psi)f)|\mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1) \end{array}$$

Wir prüfen die notwendigen Eigenschaften einer Spektraldistribution:

- Die Wohldefiniertheit (also Invarianz des Operators auf dem angegebenen Raum) rechnet man sofort mit der Definition nach.
- Sei $x \in \mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1)$. Dann

$$\Delta_U(1)x = \Phi_U(1-\psi)x = \Phi_U(1)x - \underbrace{\Phi_U(\psi)x}_{=0} = \mathrm{id}x.$$

- Sei p ein Polynom in $\mathcal{E}(\mathbb{C})$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} \Delta_U(p) & = & \Phi_U(p(1-\psi)) \\ & = & \Phi_U(p)\Phi_U(1-\psi) \\ & = & p(S_U)\Delta_U(1) = p(S_U) \end{array}$$

  auf $\mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1)$. Dabei folgt die vorletzte Gleichheit aus der Homomorphieeigenschaft von Φ_U. Insbesondere ist $\Delta_U(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = S_U$.

- Δ_U ist stetig, da Φ_U und Multiplikation mit $1-\psi$ stetig sind.

Damit ist (1.30) gezeigt.

Unsere Voraussetzung $\alpha_T f_n \to 0$ in $\mathcal{E}(V(z_0), X)$ läßt sich auch als

$$\alpha_{S_U} f_n \to 0 \quad \text{in } \mathcal{E}(V(z_0), X_U)$$

schreiben. Nach Lemma 1.26 gilt:

$$X_U = \mathcal{B}_{\Phi_U}(\overline{W}_2) + \mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1).$$

Wenn χ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion mit $\operatorname{supp}\chi \subset W_2$ und $\operatorname{supp}(1-\chi) \cap W_1 = \emptyset$ ist und $\Phi_U(\chi)f$ die $\mathcal{E}(V(z_0), X)$-Funktion $z \mapsto \Phi_U(\chi)(f(z))$, so gilt:

$$\alpha_{S_U}\Phi_U(\chi_{1,2})f_n = \Phi_U(\chi_{1,2})\alpha_{S_U} f_n \to 0 \quad \text{in } \mathcal{E}(V(z_0), X_U) \tag{1.31}$$

mit $\chi_1 := \chi$ und $\chi_2 := 1-\chi$ (die Zuordnung $f \mapsto \Phi_U(\chi_j)f$ ist stetig).
Nun können wir schließen:
1.) Da $S_U|\mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1)$ verallgemeinert skalar ist, folgt nach dem Satz von Eschmeier-Putinar (1.8), daß $S_U|\mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1)$ Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ hat. Da $\Phi_U(1-\chi)f_n$ Werte in $\mathcal{B}_{\Phi_U}(\mathbb{C} \setminus W_1)$ hat, liefert (1.31):

$$\Phi_U(1-\chi)f_n \to 0 \quad \text{in } \mathcal{E}(V(z_0), X_U). \tag{1.32}$$

2.) Nach Lemma 1.25 ist $\sigma(S_U|\mathcal{B}_{\Phi_U}(\overline{W}_2)) \subset \overline{W}_2$. Außerdem gilt $\overline{W}_2 \cap V(z_0) = \emptyset$. Deshalb existiert für alle $z \in V(z_0)$ die Abbildung $(z - S_U|\mathcal{B}_{\Phi_U}(\overline{W}_2))^{-1}$. Bezeichnet $(\alpha_{S_U}^{-1} f)(z) := (z-S_U)^{-1} f(z)$ und beachtet man, daß $\Phi_U(\chi)f_n$ Werte in $\mathcal{B}_{\Phi_U}(\overline{W}_2)$ hat, dann folgt mit (1.31)

$$\begin{aligned} & \Phi_U(\chi)f_n \\ = \; & (\alpha_{S_U})^{-1}(\alpha_{S_U}\phi_U(\chi)f_n) \to (\alpha_{S_U})^{-1}(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.33}$$

(1.32) und (1.33) liefern insgesamt:

$$f_n = \Phi_U(1)f_n = (\Phi_U(\chi) + \Phi_U(1-\chi))f_n \to 0 \quad \text{in } \mathcal{E}(V(z_0), X_U).$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. ■

Nachdem wir die Beweise unserer lokalisierten Theorie geführt haben, müssen wir uns fragen, ob wir damit auch wirklich etwas Neues entwickelt haben, oder nur schon bekannte Dinge etwas umformuliert worden sind. Denn wir wissen noch gar nicht, ob es überhaupt einen Operator $T \in L(X)$ gibt, für den eine Ausnahmemenge $S \neq \emptyset$ der bisher betrachteten Gestalt existiert mit $S \subsetneqq \sigma(T)$. Wir werden im nächsten Paragraphen diese Frage positiv beantworten.

1.28 Für das weitere wollen wir noch folgende Sprechweise einführen: Wenn ein Operator $T \in L(X)$ eine der Bedingungen β_i^S erfüllt, $i = 1, 2$, dann sagen wir, er hat Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ **modulo** S.

Eine hinreichende Bedingung für $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S

Wir wollen nun noch im Hinblick auf den nächsten Paragraphen eine etwas abgeschwächte Bedingung für die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S angeben.

1.29 Lemma *Sei S kompakt in $\mathbb{C}$. Wenn für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit $\Omega \cap S = \emptyset$ gilt:*

$$\alpha_T f_n \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega, X) \text{ für eine Folge } \{f_n\} \text{ in } \mathcal{D}(\Omega, X)$$
$$\Rightarrow f_n \to 0 \text{ in } \mathcal{E}(\Omega, X),$$

dann hat T Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S.

Beweis : Wir zeigen Eigenschaft β_1^S.
Sei Ω wie im Satz, sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}(\Omega, X)$ mit $\alpha_T f_n \to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega, X)$. Für eine kompakte Teilmenge W von Ω bezeichne $\chi^{(W)}$ eine Funktion aus $\mathcal{E}(\Omega, X)$ mit $\operatorname{supp}(\chi^{(W)}) \subset \Omega$ und $\operatorname{supp}(1 - \chi^{(W)}) \cap W = \emptyset$. Dann gilt auch $\alpha_T(f_n\chi^{(W)}) \to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega, X)$.
Wir betrachten den Raum

$$\mathcal{D}_G(\Omega, X) := \{f \in \mathcal{E}(\Omega, X);\ \operatorname{supp} f \subset G\}$$

für eine kompakte Teilmenge G von Ω. Dieser ist abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{E}(\Omega, X)$. Da aber

$$\alpha_T(f_n\chi^{(W)}) \in \mathcal{D}_{\operatorname{supp}(\chi^{(W)})}(\Omega, X) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

folgt

$$\alpha_T(f_n\chi^{(W)}) \to 0 \text{ in } \mathcal{D}_{\operatorname{supp}(\chi^{(W)})}(\Omega, X).$$

Nun ist aber Konvergenz einer Folge $\{g_n\}$ in $\mathcal{D}(\Omega, X)$ schon gleichbedeutend damit, daß alle Folgenglieder einen gemeinsamen Träger V in Ω haben und die Folge schon in $\mathcal{D}_V(\Omega, X)$ konvergiert (siehe etwa [32], Satz VIII,5.2, wo aber nur der skalarwertige Fall behandelt wird. Der vektorwertige läßt sich analog beweisen).

Wir haben also : $\alpha_T(f_n\chi^{(W)}) \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega, X)$. Nach Voraussetzung folgt daraus

$$f_n\chi^{(W)} \to 0 \text{ in } \mathcal{E}(\Omega, X).$$

Also ist insbesondere

$$\|\bar{\partial}^j f_n\|_{2,W} = \|\bar{\partial}^j(f_n\chi^{(W)})\|_{2,W} \to 0.$$

Da W beliebig in Ω war, folgt $f_n \to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega, X)$. Da auch $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus S$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

1.30 Hat ein Operator T die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$, dann auch jedes skalare Vielfache. Bei Vorhandensein einer Ausnahmemenge S ist dies jedoch i.a. nicht mehr richtig. Ist aber $S = \{0\}$, kann der Beweis übertragen werden.
Wir nehmen an, $T \in L(X)$ habe Eigenschaft $\beta_1^{\{0\}}$. Sei $V \subset\subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist für $z \in V$

$$(z - \lambda T)f(z) = \lambda\,(\lambda^{-1}z - T)f(z) = \lambda\,(\lambda^{-1}z - T)g(\lambda^{-1}z)$$

für $f \in \mathcal{E}(V, X)$ und $g(w) := f(\lambda w)$ und daher $g \in \mathcal{E}(\lambda^{-1}V, X)$. Nun ist aber auch $\lambda^{-1}V \subset\subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und daher folgt für $\{f_n\} \subset \mathcal{E}(V, X)$

$$\sup_V \|(z - \lambda T)f_k(z)\| \to 0 \Rightarrow \sup_{\lambda^{-1}V} \|(z - T)g_k(z)\| \to 0,$$

woraus nach Voraussetzung $\sup_{\lambda^{-1}V} \|g_k(z)\| \to 0$ und damit $\sup_V \|f_k(z)\| \to 0$ folgt. Dieselbe Argumentation funktioniert auch für alle Ableitungen, und daher haben wir bewiesen:

1.31 Lemma *Hat $T \in L(X)$ Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$, dann auch λT für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Man sieht auch, warum diese Aussage für allgemeines S nicht richtig ist: ist $V \cap S = \emptyset$, so muß dies nicht unbedingt auch für $\lambda^{-1}V$ gelten.

Schlußbemerkung: Man kann die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ auch für Tupel vertauschender Banachraumoperatoren definieren (in Paragraph 3 werden wir Eigenschaft (β) für solche Tupel definieren; $(\beta)_{\mathcal{E}}$ ergibt sich daraus wieder, indem man die analytischen Funktionen durch glatte ersetzt). Eine noch offene Frage ist hierbei, ob auch die mehrdimensionale Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ lokalisierbar ist. Versuche in dieser Richtung sind leider gescheitert, da wir für die exakte $\bar{\partial}$-Sequenz, welche ein wichtiger Bestandteil der Charakterisierung von $(\beta)_{\mathcal{E}}$ in diesem Fall ist, keinen geeigneten Ersatz gefunden haben.

§2 Beispiele zur Lokalisierung von $(\beta)_{\mathcal{E}}$

Abstrakte Beispiele

2.1 Sehr natürliche Beispiele für Operatoren mit Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S sind in der Klasse der kompakten Operatoren zu finden. Die speziellen Eigenschaften ihres Spektrums erlauben es, $(\beta)_{\mathcal{E}}$ bis auf den Ursprung zu zeigen. Zuvor sei daran erinnert, wie für Matrizen auf n-dimensionalen Räumen der $\mathcal{C}^n$-Kalkül definiert ist:

Jede $(n \times n)$-Matrix läßt sich bekanntlich als Summe $D + N$ schreiben, wobei D eine Diagonalmatrix bezeichnet und N eine nilpotente. Für $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{C})$ setzt man dann ([4], Ch.4.1, Example 1.3b)

$$f(D+N) := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(D)\, N^j,$$

wobei $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(D)$ die Diagonalmatrix ist, die an der Stelle (k,k) den Wert $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(d_{k,k})$ hat, $d_{k,k}$ der (k,k)-Eintrag von D.

2.2 Satz *Sei T ein kompakter Operator auf einem Banachraum. Dann hat T Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$.*

$\triangleright$ **Beweis:** Wir zeigen, daß T einen $\mathcal{E}_U$-Kalkül hat für alle $U \in \mathcal{U}_{\{0\}}$.
Jeder Spektralwert ungleich Null von T ist ein Eigenwert. Die zugehörigen Haupträume haben endliche Dimension und erlauben eine direkte Zerlegung des zugrundeliegenden Raumes. Genauer heißt das, daß zu $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ abgeschlossene, unter T invariante Unterräume N_λ und R_λ existieren, so daß $X = N_\lambda \oplus R_\lambda$, $\dim N_\lambda < \infty$ und $T|R_\lambda$ ein Isomorphismus ist ([21], Lemma 15.11). Wie man sofort sieht ist $T|R_\lambda$ wieder kompakt und $\sigma(T|R_\lambda) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$. Demnach kann man den Operator T schreiben als direkte Summe einer Matrix A_λ und eines kompakten Operators K_λ mit $\sigma(K_\lambda) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$.
Für endlich viele Eigenwerte $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ erhält man durch sukzessive Anwendung

$$T = A_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus A_{\lambda_m} \oplus K, \tag{2.1}$$

wobei K kompakt ist mit $\sigma(K) = \sigma(T) \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ und die A_{λ_j} Matrizen sind.

Ist $U \in \mathcal{U}_{\{0\}}$, so liegen nur endlich viele Elemente von $\sigma(T)$ außerhalb von U, etwa $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Dann existiert eine Zerlegung wie in (2.1). Für $f \in \mathcal{E}_U(\mathbb{C})$ bietet sich somit an:

$$f(T) := f(A_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus f(A_{\lambda_m}) \oplus f(K),$$

wobei $f(K)$ der analytische Funktionalkalkül ist. Die Zuordnung $f \mapsto f(T)$ definiert nun den gesuchten $\mathcal{E}_U$-Kalkül. Nach Satz 1.27 hat T Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$. ■

Kompakte Operatoren, die außer der Null noch andere Spektralwerte besitzen, sind damit erste Beispiele dafür, daß $\emptyset \neq S_T \subsetneqq \sigma(T)$ sein kann.

2.3 Wir wollen noch ein zweites Beispiel für die Bedingung $\emptyset \neq S_T \subsetneqq \sigma(T)$ angeben, wobei gleichzeitig auch zu sehen ist, daß aus Eigenschaft (β) nicht schon $(\beta)_{\mathcal{E}}$ folgen muß.

Zu diesem Zweck sei T ein Banachraumoperator, der quasinilpotent, aber nicht nilpotent ist. Beispiele solcher findet man bei den Volterra-Operatoren. Dann ist $\sigma(T) = \{0\}$, und T hat daher Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$. Desweiteren ist T auch zerlegbar und hat damit Eigenschaft (β) (die Zerlegbarkeit von Operatoren mit einpunktigem Spektrum prüft man sofort nach, der Zusammenhang zu (β) wurde in der Einleitung erwähnt). Die beiden folgenden Aussagen zeigen nun, daß T nicht $(\beta)_{\mathcal{E}}$ hat.

Sei $S \in L(X)$ subskalar. Dann existiert eine verallgemeinert skalare Erweiterung $\hat{S}$ von S mit $\sigma(\hat{S}) \subset \sigma(S)$.

Zum Beweis siehe Kapitel 6.4 (S.186) in [8]. Damit hätte T eine verallgemeinert skalare Fortsetzung mit Spektrum $\{0\}$. Nun gilt aber ([4], Theor. 4.3.15.)

Sei $S \in L(X)$ verallgemeinert skalar und quasinilpotent. Dann ist S schon nilpotent.

Das bedeutet nach dem vorigen Ergebnis, daß T schon nilpotent sein müßte, also ein Widerspruch. Damit ist tatsächlich schon $S_T = \{0\}$, der Operator hat nicht $(\beta)_{\mathcal{E}}$.

Dieses Beispiel läßt sich schnell für unser Problem modifizieren.
Um das Spektrum zu vergrößern, bilden wir die direkte Summe von T und einem anderen Banachraumoperator $S \in L(Y)$ mit Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$, der Spektrum $\sigma(S) \supsetneqq \{0\}$ hat (gewisse Schiftoperatoren sind Beispiele hierfür; siehe auch den nächsten Abschnitt). Dann gilt

$$\sigma(S \oplus T) = \sigma(S) \cup \sigma(T) \supsetneqq \{0\}.$$

Der Operator $S \oplus T \in L(Y \oplus X)$ hat Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$, aber nicht Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$. Sei dazu $\{f_n\}$ eine Folge in $\mathcal{E}(V, Y \oplus X)$ über einer offenen Menge V in $\mathbb{C}$ mit $\alpha_{S \oplus T} f_n \to 0$. Wählen wir auf $Y \oplus X$ die 1-Norm (d.h. $\| \cdot \cdot \|_{Y \oplus X} := \| \cdot \cdot \|_Y + \| \cdot \cdot \|_X$), dann heißt dies ($f_n^{(\cdot)}$ ist die entsprechende Projektion von f_n nach X bzw. Y)

$$\|\bar{\partial}^j \alpha_S f_n^{(Y)}\|_{2,W} + \|\bar{\partial}^j \alpha_T f_n^{(X)}\|_{2,W} \to 0$$

für alle $j \geq 0$ und $W \subset\subset V$. Dabei liefert der zweite Summand nur dann $f_n^{(X)} \to 0$ in $\mathcal{E}(V, X)$, wenn $0 \notin V$. Also haben wir einen Operator der gewünschten Art gefunden.

Ist ein Operator T (links-, rechts-)invertierbar, dann sind dies auch alle Operatoren in einer geeigneten Umgebung von T. Daraus lassen sich im Hilbertraumfall Schlüsse auf das Verhalten von α_T in einer Umgebung von 0 ziehen.

2.4 Lemma *Sei $T \in L(H)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild, H ein Hilbertraum. Dann existiert eine Nullumgebung U in $\mathbb{C}$, so daß α_T auf $\mathcal{E}(U, H)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild ist.*

$\triangleright$ **Beweis:** Da $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen ist in H, existiert die orthogonale Zerlegung

$$H = \operatorname{Bild} T \oplus (\operatorname{Bild} T)^{\perp}.$$

Vermöge

$$A : H \longrightarrow H, \qquad A(u \oplus v) := T^{-1} u$$

ist eine Linksinverse für T gegeben. Ist daher $\|S-T\| < \|A\|^{-1}$, dann $\|AS-1\| = \|A(S-T)\| < 1$ und daher ist AS invertierbar in $L(H)$ ([24], Th.10.7). Wegen $\|(T-z)-T\| = |z|$ existiert deshalb eine Umgebung U um 0 in $\mathbb{C}$, so daß für alle $z \in U$ der Operator $A(z-T)$ invertierbar in $L(H)$ ist. Hat man daher eine Folge $\{f_n\}_n$ in $\mathcal{E}(U,H)$ mit $\alpha_T f_n \to 0$, dann ist

$$\|\bar{\partial}^j f_n\|_{2,V}^2 = \int_V \|(z-T)^{-1}(z-T)\bar{\partial}^j f_n\|^2 \, dz \overset{(*)}{\leq} \sup_{z \in V} \|(z-T)^{-1}\|^2 \|\bar{\partial}^j \alpha_T f_n\|_{2,V}^2 \to 0$$

für alle $V \subset\subset U$ und $j \in \mathbb{N}_0$. Man beachte bei $(*)$, daß $\|(\cdot - T)^{-1}\|$ eine stetige Funktion auf U ist und damit auf V beschränkt. ∎

Der gewichtete Shift

Wir wollen nun unsere Theorie am Beispiel des gewichteten Shifts demonstrieren.

2.5 *Sei H ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis (ONB) $\{e_n\}_{n\geq 0}$, $\{w_n\}_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt der lineare Operator*

$$T : H \longrightarrow H \quad , \quad T\left(\sum_{n\geq 0} \widehat{x}(n) e_n\right) := \sum_{n\geq 0} \widehat{x}(n) w_n e_{n+1}$$

der einseitige gewichtete (Vorwärts-)Shift auf H mit Gewichten w_n. Dabei ist $\widehat{x}(n)$ der n-te Fourierkoeffizient des Elementes $x \in H$ bez. der ONB $\{e_n\}$.

Ausführliche Informationen zu den Shiftoperatoren (und Beweise der hier zitierten Sätze) findet man in [26].
Aus der Definition ist ersichtlich, daß ein Shiftoperator schon durch seine Wirkung auf die ONB eindeutig bestimmt ist.
Da wir im folgenden nur den einseitigen Shift betrachten, lassen wir den Zusatz 'einseitig' weg. Wir schreiben (T, w_n) für den gewichteten Shift T mit Gewichtsfolge $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Die Stetigkeit dieser Operatoren ist einfach zu charakterisieren:

Ein gewichteter Shift (T, w_n) ist genau dann stetig, wenn $C := \sup\{|w_n|; n \in \mathbb{N}_0\} < \infty$ ist. In diesem Fall ist $\|T\| = C$.

Wir betrachten im folgenden nur stetige Shiftoperatoren.

Da für M-hyponormale Operatoren Erweiterungen mit $\mathcal{C}^\infty$-Kalkül existieren (siehe 1.9), ist es von Interesse, Charakterisierungen von M-hyponormalen Shiftoperatoren zu haben. Das wichtigste Resultat ist ([20], II,2):

2.6 *Ein gewichteter Shift (T, w_n) ist genau dann hyponormal, wenn $|w_n| \leq |w_{n+1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

Wir wollen nun nach weiteren Bedingungen an die Gewichte suchen, so daß der Shift die Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ wenigstens noch lokal hat (z.B. β_1^S). Dazu brauchen wir noch den Adjungierten des Shiftoperators und eine Aussage über das Spektrum.

2.7 *Sei (T, w_n) ein gewichteter Shift auf dem Hilbertraum H. Dann ist T^* gegeben durch*

$$T^* e_n = \overline{w}_{n-1} e_{n-1} \text{ für } n \geq 1 \text{ und } T^* e_0 = 0.$$

Somit ist T^* ein Rückwärtsshift.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar.

2.8 Nach [26], Kap. 1, hat man für einen Shift (T, w_n)

$$\|T^n\| = \sup_{k\geq 0} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n-1}|. \tag{2.2}$$

Da sich der Spektralradius $r(T)$ eines Operators als $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ berechnet, ergibt sich:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n| \leq \delta \Rightarrow \sigma(T) \subset \overline{D_\delta(0)}.$$

Man kann sogar zeigen, daß das Spektrum des einseitigen gewichteten Shifts eine Kreisscheibe um Null ist (und somit auch die Null enthält).

2.9 Sei (T, w_n) ein Shift mit $\lim_{n\to\infty} |w_n| = 0$. Bezeichnet S_k den Shiftoperator mit den Gewichten $u_n^{(k)} := w_n$ falls $0 \leq n \leq k$ und $u_n^{(k)} := 0$ sonst, so hat S_k endlichdimensionales Bild und es gilt nach (2.2)

$$\|T - S_k\| = \sup_{j\geq 0} |(w_j - u_j^{(k)})| = \sup_{j\geq k} |w_j| \to 0 \quad \text{bei } k \to \infty.$$

Als Normgrenzwert von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild ist T daher kompakt und hat nach 2.2 Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ modulo $\{0\}$.

2.10 Satz *Sei (T, w_n) ein gewichteter Shift auf einem Hilbertraum H. Sei $I := \{n \in \mathbb{N}_0;\ |w_{n-1}|^2 - |w_n|^2 \geq 0\}$, wobei $w_{-1} := 0$.*

1. *Erfüllen die Gewichte die Bedingung*

$$\sum_{n\in I} (|w_{n-1}|^2 - |w_n|^2) \frac{(n+1)^2}{R^{2n+2}} < \infty, \tag{2.3}$$

für alle $R > 0$, so hat (T, w_n) Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ modulo $\{0\}$.

2. *Ist zusätzlich $\lim_{n\to\infty} |w_n| \neq 0$ und $w_n \neq 0$ für alle n, dann hat (T, w_n) Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$.*

▷**Beweis:**
Der Leser schaue sich für den Beweis noch einmal Lemma (1.6) an.
1.) Zunächst erzwingt Bedingung (2.3) auf jeden Fall die Konvergenz von $\{|w_n|\}_n$. Ist dieser Grenzwert 0, so haben wir gerade in 2.9 gesehen, daß (T, w_n) Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ modulo $\{0\}$ hat. Allgemein wollen wir mit Lemma 1.29 die Eigenschaft $\beta_1^{\{0\}}$ zeigen. Da skalare Vielfache eines Operators T die Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ modulo 0 erhalten (1.31), können wir zunächst erreichen, daß

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n| \leq \delta < 1.$$

Außerdem erfüllt auch der Operator λT die Bedingung (2.3), wenn T es tut. Dies hat die für den Beweis wesentliche Konsequenz, daß man sich ganz auf die Einheitskreisscheibe zurückziehen kann, denn nach 2.8 liegt das Spektrum des 'gestauchten' Operators in der Kreisscheibe mit Radius $\delta < 1$. Da außerhalb des Spektrums die Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ sowieso vorliegt, reicht es, Ω in der Einheitskreisscheibe zu betrachten.

Sei also Ω eine beschränkte offene Menge in $D_1(0) \setminus \{0\}$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß Ω stückweise glatten Rand hat, denn Ω kann durch endlich viele Kreisscheiben in $D_1(0) \setminus \{0\}$ überdeckt werden. Zunächst überzeugt man sich schnell von folgender Behauptung

($<\cdot,\cdot>$ ist das Skalarprodukt auf dem zugrundeliegenden Hilbertraum):

Für alle $x \in H$, $z \in \mathbb{C}$ und $T \in L(H)$ ist

$$\|(\bar{z}-T^*)x\|^2 - \|(z-T)x\|^2 = <(TT^*-T^*T)x, x> .$$

Aus der Definition und Aussage 2.7 läßt sich $<(TT^*-T^*T)x,x>$ leicht berechnen; wir erhalten:

$$TT^*\left(\sum_{n\geq 0}\widehat{x}(n)e_n\right) = \sum_{n\geq 0}\widehat{x}(n)|w_{n-1}|^2 e_n, \tag{2.4}$$

$$T^*T\left(\sum_{n\geq 0}\widehat{x}(n)e_n\right) = \sum_{n\geq 0}\widehat{x}(n)|w_n|^2 e_n \tag{2.5}$$

und damit

$$\|(\bar{z}-T^*)x\|^2 = \|(z-T)x\|^2 + \sum_{n\geq 0}|\widehat{x}(n)|^2(|w_{n-1}|^2 - |w_n|^2). \tag{2.6}$$

Nun läßt sich die rechte Seite von (1.5) mit (2.6) umwandeln und wir erhalten für alle $f \in \mathcal{D}(\Omega, H)$ mit $K_\Omega = 3C_\Omega^2$ (beachte, daß in (1.5) keine Quadrate stehen):

$$\begin{aligned}
\|f\|_{2,\Omega}^2 &\leq K_\Omega\left(\int_\Omega \|(\bar{z}-T^*)\bar{\partial}f(z)\|^2\,dz + \int_\Omega \|(\bar{z}-T^*)\bar{\partial}^2 f(z)\|^2\,dz\right)\\
&= K_\Omega\Bigg(\int_\Omega \|(z-T)\bar{\partial}f(z)\|^2\,dz + \int_\Omega \|(z-T)\bar{\partial}^2 f(z)\|^2\,dz +\\
&\quad + \int_\Omega \sum_{n\geq 0}(|w_{n-1}|^2 - |w_n|^2)\left(|\widehat{\bar{\partial}f(z)}(n)|^2 + |\widehat{\bar{\partial}^2 f(z)}(n)|^2\right)\,dz\Bigg)\\
&= K_\Omega\Bigg(\|\alpha_T\bar{\partial}f\|_{2,\Omega}^2 + \|\alpha_T\bar{\partial}^2 f\|_{2,\Omega}^2 +\\
&\quad + \int_\Omega \sum_{n\geq 0}(|w_{n-1}|^2 - |w_n|^2)\left(|\widehat{\bar{\partial}f(z)}(n)|^2 + |\widehat{\bar{\partial}^2 f(z)}(n)|^2\right)\,dz\Bigg)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Beachte, daß $\bar{\partial}^j f(z)$ ein Element von H ist.
Im letzten Summanden in (2.7) schätzen wir weiter nach oben ab, indem wir die Indizes $n \notin I$ weglassen.
Sei nun $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega, H)$ mit $\alpha_T f_k \to 0$ bei $k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega, H)$. Wie schon im Beweis von 1.29 bemerkt, existiert eine in Ω kompakte Menge V, so daß $\operatorname{supp}(\alpha_T f_k) \subset V$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Konvergenz findet bereits in $\mathcal{E}(\Omega, H)$ statt. Daher ist schon

$$\|\bar{\partial}^j\alpha_T f_k\|_{2,\Omega} = \|\bar{\partial}^j\alpha_T f_k\|_{2,V} \to 0 \quad \text{bei } k \to \infty. \tag{2.8}$$

Also gehen die ersten beiden Summanden in (2.7) gegen 0.
Bei der Abschätzung der Integralausdrücke machen wir uns folgende Gleichheit zu Nutze:

$$((z-T)\bar{\partial}^j f(z))\widehat{\ }(0) = z(\widehat{\bar{\partial}^j f(z)})(0) \tag{2.9}$$

$$((z-T)\bar{\partial}^j f(z))\widehat{\ }(n) = z(\widehat{\bar{\partial}^j f(z)})(n) - w_{n-1}\widehat{\bar{\partial}^j f(z)}(n-1),\ n \geq 1. \tag{2.10}$$

Man erhält sie durch direktes Nachrechnen.
Damit kann man zeigen, daß auch bei der Behandlung von $|\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n)|^2$ die Menge Ω durch

eine kompakte ersetzt werden kann, die sogar in V liegt (zwar liegen die Träger aller $\alpha_T f_k$ in einer gemeinsamen kompakten Menge, dies muß dann aber nicht notwendig für die f_k gelten). Denn mit (2.9) und (2.10) kann man ohne Schwierigkeit (induktiv) zeigen, daß für die $z \in \Omega$, für die $(z-T)\bar{\partial}^j f(z) = 0$ ist schon $\widehat{\bar{\partial}^j f(z)}(n) = 0$ ist für alle n, und daher $\bar{\partial}^j f(z) = 0$, also $\operatorname{supp} f_k \subset V$ für alle k.

Es gelingt leider nicht, die gleichmäßige Konvergenz (in n) der $\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n)$ auf V zu zeigen. Vielmehr muß noch ein zusätzlicher Faktor auftauchen. Nun läßt sich für kompaktes W die Supremumsnorm durch die $\|\cdot\cdot\|_{2,W}$-Norm abschätzen (wieder die Äquivalenz der beiden Topologien auf $\mathcal{C}^\infty$) und wir erhalten aus (2.8)

$$\sup_{z\in V} \|(z-T)\bar{\partial}^j f_k(z)\|^2 \to 0 \tag{2.11}$$

für $j \in \mathbb{N}_0$.

Entwickeln wir den Ausdruck $(z-T)\bar{\partial}^j f_k(z)$ in seine Fourier-Reihe bez. der Basis von H und beachten (2.9) und (2.10), so heißt (2.11)

$$\sup_{z\in V} \left\{ |z(\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)})(0)|^2 + \sum_{n\geq 1} |z(\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)})(n) - w_{n-1}\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n-1)|^2 \right\} \to 0 \tag{2.12}$$

bei $k \to \infty$. Da somit auch das Supremum jedes einzelnen Summanden in (2.12) gegen 0 gehen muß, können wir induktiv beweisen:

$$\sup_{z\in V} |z|^{n+1} |\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n)| \to 0 \text{ bei } k \to \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.13}$$

Der Induktionsbeginn ist klar, das Supremum des ersten Summanden in (2.12) muß gegen 0 gehen.

Desweiteren ist

$$\begin{aligned} & |z|^{n+1} |\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n)| \\ \leq \quad & |z|^n \left(|z(\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)})(n) - w_{n-1}\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n-1)| + |w_{n-1}\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n-1)| \right). \end{aligned}$$

Das Supremum des ersten Summanden in der rechten Klammer konvergiert bei $k \to \infty$ gegen 0, da der Summand ein Teil der Reihe in (2.12) ist. Der zweite Summand unterliegt der Induktionsbedingung.

Die Aussage (2.11) liefert aber noch etwas anderes, nämlich

$$C^2 \geq \sup_{z\in V} \left\{ |z(\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)})(0)|^2 + \sum_{n\geq 1} |z(\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)})(n) - w_{n-1}\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n-1)|^2 \right\} \tag{2.14}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ für ein $C > 0$. Durch denselben Induktionsvorgang zeigt man daher (unter Zuhilfenahme der Voraussetzungen $|z| \leq 1$ und $|w_n| \leq \delta < 1$ für alle n):

$$\sup_{z\in V} |z|^{n+1} |\widehat{\bar{\partial}^j f_k(z)}(n)| \leq (n+1)\, C. \tag{2.15}$$

Nun können wir den Integralausdruck in (2.7) abschätzen (wir betrachten der Einfachheit halber nur die $\bar{\partial}$-Ausdrücke). Zunächst sehen wir, daß

$$\begin{aligned} \sup_{V} \left\{ (|w_{n-1}|^2 - |w_n|^2)|z|^{2n+2} |\widehat{\bar{\partial} f_k(z)}(n)|^2 \frac{1}{|z|^{2n+2}} \right\} \leq \\ (|w_{n-1}|^2 - |w_n|^2)(n+1)^2 C^2 \frac{1}{R^{2n+2}} \end{aligned} \tag{2.16}$$

für alle k nach (2.14), wobei $R := \mathrm{dist}(0, V) > 0$ ist (da V relativkompakt in Ω). Die Reihe über die Terme rechts konvergiert aber nach Voraussetzung, und daher sind Summe und Integral vertauschbar (beachte nochmals, daß $\operatorname{supp} f_k \subset V$ für alle k). Da V kompakt ist, liefert die rechte Seite von (2.16) bis auf einen konstanten Faktor auch eine summierbare Majorante von

$$\int_V (|w_{n-1}|^2 - |w_n|^2) \left(|\widehat{\bar\partial f_k(z)}(n)|^2 \right) dz.$$

Damit und wegen (2.13) folgt schließlich die Konvergenz der Integralterme in (2.7) gegen 0.
Man beachte, daß für beliebige Folgen $\{f_n\}$ der Abstand R beliebig klein werden kann. Daher wird in (2.3) die Konvergenz für alle $R > 0$ gefordert.

Die gerade durchgeführte Prozedur ist aber auch auf $\bar\partial^j f$, $j \geq 1$, statt f anwendbar (in (2.8) - (2.15) war ja j beliebig), und daher haben wir insgesamt gezeigt, daß mit $\alpha_T f_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega, H)$ auch $f_k \to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega, H)$, falls $\{f_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega, H)$. Nach Satz 1.29 folgt sofort die Behauptung.

2.) Unter den Vorgaben im zweiten Teil des Satzes folgt sofort

$$\|Tx\|^2 = \Big\| \sum_{n\geq 0} \widehat{x}(n) w_n e_{n+1} \Big\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\widehat{x}(n) w_n|^2 \geq C \sum_{n\geq 0} |\widehat{x}(n)|^2 = \|x\|^2, \tag{2.17}$$

wobei C eine untere Schranke für $|w_n|$ ist. Nun folgt aber aus (2.17) sofort, daß T injektiv mit abgeschlossenem Bild ist (denn T hat dann eine stetige Inverse auf seinem Bild), was nach 2.4 die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ in einer Umgebung der Null liefert. Daher folgt aus dem ersten Teil und Satz 1.12 sofort die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$. ■

Falls I endlich ist, so ist Bedingung (2.3) immer erfüllt. Das heißt insbesondere, daß gewichtete Shiftoperatoren mit $I = \emptyset$ schon Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ haben. Das ist aber klar, denn diese sind nach 2.6 genau die hyponormalen Shifts.

2.11 Wir wollen nun noch ein Beispiel geben. Wir setzen

$$w_0^2 := a^2 > 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k^2),\ a > 0, \quad w_n := \left(a^2 - \sum_{k=1}^{n} \exp(-k^2) \right)^{1/2}$$

Es gilt: $|w_{n-1}|^2 - |w_n|^2 = \exp(-n^2)$ für $n \geq 1$ und somit ist Bedingung (2.3) erfüllt.

Wie schon erwähnt, ist Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ i.a. recht schwierig nachzuweisen. In manchen Fällen ist es sogar einfacher, durch 'scharfes Hinsehen' eine Erweiterung des Operators mit $\mathcal{C}^\infty$-Kalkül zu finden.
Hier würde es sich auch anbieten, den Shiftoperator auf M-Hyponormalität zu untersuchen. Aber auch das scheint in voller Allgemeinheit ein schwieriges Unterfangen zu sein (siehe dazu Bemerkungen vor 1.7).

§3 Spektraltheorie mehrerer Veränderlicher

Koszul-Komplex und Taylorspektrum

3.1 Es bezeichne $\Lambda[s_1, \ldots, s_N]$ die äußere Algebra erzeugt von N Unbestimmten $\sigma = (s_1, \ldots, s_N)$ über $\mathbb{C}$ ([19], Kap.XIX). In der Algebra $\Lambda[\sigma] := \Lambda[s_1, \ldots, s_N]$ wird die Multiplikation mit dem Symbol $\wedge$ geschrieben. Die Unbestimmten genügen dabei der Relation $s_i \wedge s_j = -s_j \wedge s_i$; insbesondere ist $s_i \wedge s_i = 0$.
Bezeichnet man mit

$$\Lambda^p[\sigma] := \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p},\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq N\},$$

den *Vektorraum der p-Formen über N Unbestimmten*, so läßt sich die äußere Algebra $\Lambda[\sigma]$ als graduierte Algebra

$$\Lambda[\sigma] = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p[\sigma]$$

schreiben. Dabei ist zu beachten, daß

$$\Lambda^0[\sigma] \cong \Lambda^N[\sigma] \cong \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \Lambda^p[\sigma] = \{0\} \text{ für } p \geq N+1.$$

Es besteht ein natürlicher Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}^{\binom{N}{p}}$ und $\Lambda^p[\sigma]$, da $\dim \Lambda^p[\sigma] = \binom{N}{p}$.
Für einen Vektorraum X setzt man

$$\Lambda^p[\sigma, X] := X \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^p[\sigma]$$

und notiert die Elemente aus $\Lambda^p[\sigma, X]$ als $\sum x_{i_1,\ldots,i_p}\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}$, wobei die $x_{i_1,\ldots,i_p}$ die Koeffizienten der Form genannt werden. (Zur Definition des Tensorproduktes siehe etwa [19], Kap XVI.)

Auch hier gibt es eine eindeutige Zuordnung zwischen $\Lambda^p[\sigma, X]$ und $X^{\binom{N}{p}}$. Trägt der Vektorraum daher noch eine Topologie, so werden die Räume der p-Formen über X durch die Produkttopologie auf natürliche Weise auch zu toplogischen Räumen. Für einen (F)-Raum X ist daher auch $\Lambda^p[\sigma, X]$ ein (F)-Raum. Ist X ein Banachraum, so ist auf $\Lambda^p[\sigma, X]$ mit

$$\Big\| \sum x_{i_1,\ldots,i_p}\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p} \Big\| := \sum \|x_{i_1,\ldots,i_p}\| \tag{3.1}$$

eine vollständige Norm gegeben.
Es soll noch erwähnt werden, daß für die Funktionenräume $\mathcal{O}(U, X)$ und $\mathcal{E}(U, X)$ die Isomorphien $\Lambda^p[\sigma, \mathcal{O}(U, X)] \cong \mathcal{O}(U, \Lambda^p[\sigma, X])$ und $\Lambda^p[\sigma, \mathcal{E}(U, X)] \cong \mathcal{E}(U, \Lambda^p[\sigma, X])$ bestehen.

3.2 Unter einem *Kokettenkomplex* $\{E^i, \varphi^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ von Vektorräumen versteht man eine Familie von Vektorräumen E^i und linearen Abbildungen $\varphi^i : E^i \longrightarrow E^{i+1}$ (die sog. *Kodifferentiale*) mit $\varphi^i \circ \varphi^{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Der Einfachheit halber sprechen wir nur noch von Komplexen, und diese werden auch immer nur endlich sein, d.h. es ist $E^i = \{0\}$ für fast alle $i \in \mathbb{Z}$. Desweiteren verwenden wir auch die Schreibweise $\cdots \xrightarrow{\varphi^{i-1}} E^i \xrightarrow{\varphi^i} E^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \cdots$.
Für Komplexe $\{E^i, \varphi^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ kann man zu jedem $p \in \mathbb{Z}$ den Vektorraum $H^p(\{E^i, \varphi^i\}) := \ker \varphi^p / \operatorname{Bild} \varphi^{p-1}$ bilden, die *p-te Kohomologiegruppe* von $\{E^i, \varphi^i\}$. Falls $H^p(\{E^i, \varphi^i\}) = 0$ oder gleichbedeutend $\operatorname{Bild} \varphi^{p-1} = \ker \varphi^p$ für alle p, dann heißt der Komplex *exakt* (zuweilen sprechen wir auch von *exakten Sequenzen*).

Sei $U \subset \mathbb{C}^N$ offen, $\{X^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ eine Familie von Banachräumen. Zu jedem $\lambda \in U$ und $p \in \mathbb{Z}$ existieren Abbildungen $\eta^p(\lambda) \in L(X^p, X^{p+1})$ mit $\eta^p(\lambda) \circ \eta^{p-1}(\lambda) = 0$. Dann heißt

$$\ldots \xrightarrow{\eta^{p-1}(\lambda)} X^p \xrightarrow{\eta^p(\lambda)} X^{p+1} \xrightarrow{\eta^{p+1}(\lambda)} \ldots$$

(auch $\{X^p, \eta^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$) ein *parametrisierter Komplex von Banachräumen über U.*

Es ist nun eine interessante Frage, ob sich die punktweise Exaktheit solcher parametrisierter Komplexe auf Komplexe überträgt, die aus X^p-wertigen Funktionenräumen über U bestehen. Im Fall glatter Funktionen lautet die Antwort:

3.3 *Sei $\{X^p, \eta^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ ein parametrisierter Komplex von Banachräumen über $U \subset \mathbb{C}^N$ offen. Weiterhin sei die Abbildung*

$$U \ni \lambda \mapsto \eta^p(\lambda) \in L(X^p, X^{p+1})$$

analytisch für alle $p \in \mathbb{Z}$. Ist der Komplex

$$\ldots \xrightarrow{\eta^{p-1}(\lambda)} X^p \xrightarrow{\eta^p(\lambda)} X^{p+1} \xrightarrow{\eta^{p+1}(\lambda)} \ldots$$

für alle $\lambda \in U$ exakt, dann auch der Komplex

$$\ldots \xrightarrow{\eta_*^{p-1}} \mathcal{C}^\infty(U, X^p) \xrightarrow{\eta_*^p} \mathcal{C}^\infty(U, X^{p+1}) \xrightarrow{\eta_*^{p+1}} \cdots,$$

wo η_*^p die stetige lineare Abbildung $(\eta_*^p(f))(\lambda) := \eta^p(\lambda) f(\lambda)$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(U, X^p)$ ist.

Einen Beweis findet man in [31], Kap. II,10. Parametrisierte Komplexe, für die $\lambda \mapsto \eta^p(\lambda)$ analytisch ist, heißen auch *analytisch parametrisiert.*
Ein Analogon zu 3.3 für analytische Funktionen werden wir in 3.15 kennenlernen.

3.4 Sei X ein Banachraum. Dann setzen wir

$$\Delta_N(X) := \{(T_1, \ldots, T_N) \in (L(X))^N,\ T_i T_j = T_j T_i \text{ für } 1 \leq i, j \leq N\}.$$

Die Elemente aus $\Delta_N(X)$ heißen *kommutierende Operatortupel.*

Sei $T \in \Delta_N(X)$, $0 \leq p \leq N-1$ und $\sigma = (s_1, \ldots, s_N)$. Dann bezeichnen wir mit $\gamma^p(T)$ die stetige lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma^p(T) : \Lambda^p[\sigma, X] &\longrightarrow \Lambda^{p+1}[\sigma, X] \\ x\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p} &\mapsto \sum_{j=1}^N (T_j x)\, s_j \wedge s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Definition von $\gamma^p(T)$ läßt sich folgendermaßen interpretieren. Betrachten wir den Ausdruck $\sum_{j=1}^N T_j\, s_j$ als 1-Form über σ mit Koeffizienten in $L(X)$, so kann man diese vermöge *äußerer Linksmultiplikation* auf $\Lambda^p[\sigma, X]$ operieren lassen:

$$\left(\sum_{j=1}^N T_j\, s_j\right) \wedge (x\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}) := \sum_{j=1}^N (T_j x)\, s_j \wedge s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}.$$

Mit dieser Terminologie werden in 3.8 noch andere Abbildungen auf p-Formen definiert.

Wie man sofort zeigen kann, gilt $\gamma^p(T) \circ \gamma^{p-1}(T) = 0$ für $1 \leq p \leq N-1$ (wobei wesentlich die paarweise Vertauschbarkeit der Operatoren $T_1, \ldots, T_N$ eingeht). Also kann man aus $\Lambda^p[\sigma, X]$ und $\gamma^p(T)$ einen Komplex bauen.
Für einen Banachraum X und $T \in \Delta_N(X)$ heißt der Komplex

$$0 \longrightarrow \Lambda^0[\sigma, X] \xrightarrow{\gamma^0(T)} \Lambda^1[\sigma, X] \xrightarrow{\gamma^1(T)} \cdots \xrightarrow{\gamma^{N-1}(T)} \Lambda^N[\sigma, X] \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

Koszul-Komplex von T über X und wird mit $K^\bullet(T, X)$ bezeichnet.

Für einen einzelnen Operator $T \in L(X)$ und $z \in \mathbb{C}$ lautet der Koszul-Komplex $K^\bullet(z-T, X)$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{z-T} X \longrightarrow 0.$$

Da dieser genau dann exakt ist, wenn der Operator $z - T$ eine stetige Inverse hat, scheint folgende Definition eine sinnvolle Erweiterung des Spektrumbegriffs zu sein ([27]):

3.5 *Wird für $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ und $T \in \Delta_N(X)$ mit $z - T$ das Operatortupel*

$$z - T := (z_1\mathrm{id} - T_1, \ldots, z_N\mathrm{id} - T_N) \in \Delta_N(X)$$

bezeichnet, dann nennt man die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C}^N \setminus \{z \in \mathbb{C}^N,\, K^\bullet(z-T, X) \textit{ ist exakt } \}$$

das Taylorspektrum von *T. Weiterhin setzt man $\rho(T) := \sigma(T)^c$, die* Resolventenmenge.

Daß diese Menge wirklich den Namen Spektrum verdient zeigt sich u.a. an den folgenden Eigenschaften (siehe auch [27]):

1. $\sigma(T)$ ist eine nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}^N$.
2. Wenn $T = (T_1, \ldots, T_N) \in \Delta_N(X)$, $T' = (T_1, \ldots, T_{N-1})$ und $\pi : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^{N-1}$ die Projektion auf die ersten $(N-1)$ Koordinaten ist, dann ist $\sigma(T') = \pi(\sigma(T))$.
3. Es existiert ein analytischer Funktionalkalkül auf $\sigma(T)$ (siehe unten).
4. Für $N = 1$ ist das Taylorspektrum das klassische Spektrum.

Wir werden im folgenden die Menge $\sigma(T)$ der Einfachheit halber das Spektrum von T nennen. Desweiteren bezeichne $\sigma(T, Y)$ das Spektrum von T eingeschränkt auf einen abgeschlossenen invarianten Teilraum Y (invariant heißt hier $T_j Y \subset Y$ für $1 \leq j \leq N$).

Für spätere Anwendungen wird noch folgende Aussage hilfreich sein (siehe [31], Lemma III.6.5).

3.6 *Sei $T \in \Delta_N(X)$, $w \in \mathbb{C}^N$. Existiert ein Operatortupel $S \in \Delta_N(X)$ mit $S_j\,T_i = T_i\,S_j$ für alle $i, j = 1, \ldots, N$ und ist $\sum_{j=1}^N S_j\,(w_j - T_j) = \mathrm{id}$, so ist $w \notin \sigma(T)$.*

Der analytische Funktionalkalkül

Wie im ersten Abschnitt angedeutet, ist das Taylorspektrum eines kommutierenden Operatortupels die richtige Verallgemeinerung des eindimensionalen Begriffs. Dies wird vor allem dadurch deutlich, daß es einen analytischen Funktionalkalkül auf dieser Menge gibt (was ja einer der Hauptgründe für das Interesse an Spektren in Banachalgebren ist). Wir wollen kurz auf die Konstruktion des Kalküls eingehen. Dazu geben wir zuerst die Definition einer holomorphen Funktion mehrerer Veränderlicher ([17], [18]).

3.7 *Sei $U \subset \mathbb{C}^N$ eine offene Teilmenge, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine C^1-Funktion (als Abbildung auf $U \subset \mathbb{R}^{2N}$ betrachtet). Dann nennt man f* holomorph *auf U, wenn die sog. Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt sind:*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) \equiv 0 \ \text{auf } U, \qquad 1 \leq j \leq N, \tag{3.4}$$

für $z_j = x_j + iy_j$. Die auf U holomorphen Funktionen bezeichnet man wieder mit $\mathcal{O}(U)$.

Im Einklang zur klassischen Theorie ist definiert man auch $\frac{\partial}{\partial z_j} f := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j})$. Die in 3.7 gegebene Definition läßt sich auch sofort auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Wie im Eindimensionalen setzt man:

$$\mathcal{O}(U, X) := \{f \in \mathcal{C}^1(U, X),\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0 \text{ auf } U \text{ für } 1 \leq j \leq N\}$$

für eine offene Menge U in $\mathbb{C}^N$ und einen Banachraum X.
Der Raum $\mathcal{O}(U, X)$ ist ein (F)-Raum mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen auf allen kompakten Teilmengen von U.

Demnach sind die Räume $\Lambda^p[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$, wie am Ende von 3.1 erwähnt, wieder (F)-Räume. Ist $\omega = f\,s_{i_1}\wedge\ldots\wedge s_{i_p} \in \Lambda^p[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$ und $z \in U$, dann sei $\omega(z) := f(z)\,s_{i_1}\wedge\ldots\wedge s_{i_p} \in \Lambda^p[\sigma, X]$. Wegen der Isomorphie von $\Lambda^p[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$ und $\mathcal{O}(U, \Lambda^p[\sigma, X])$ hängt $\omega(z)$ holomorph von z ab. Wir werden daher $\omega \in \Lambda^p[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$ gelegentlich auch als holomorphe Abbildung von U nach $\Lambda^p[\sigma, X]$ auffassen.

3.8 Für die Definition des *Cauchy-Weil-Integrals*, dem Hauptbestandteil des Funktionalkalküls von Taylor, betrachten wir die beiden Systeme von Unbestimmten

$$\sigma = (s_1, \ldots, s_N) \quad \text{und} \quad d\bar{z} = (d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_N).$$

Auf $\mathcal{C}^\infty(U, X)$, $U \subset \mathbb{C}^N$ offen, ist

$$\bar{\partial} := (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_N})$$

ein Operatortupel in $\Delta_N(\mathcal{C}^\infty(U, X))$. Wie bei der Definition der Abbildung $\gamma^p(T)$ kann durch äußere Linksmultiplikation mit $\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\,d\bar{z}_j$ ein stetiger linearer Operator

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^p : \Lambda^p[d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U, X)] \quad &\longrightarrow \quad \Lambda^{p+1}[d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U, X)] \\ \omega \quad &\mapsto \quad \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\,d\bar{z}_j\right) \wedge \omega \end{aligned}$$

definiert werden. Der Operator ∂^p ist analog mit $\frac{\partial}{\partial z_j}$ definiert.
Wie in einer Veränderlichen (siehe Def. 1.2) bezeichnen wir für $T = (T_1, \ldots, T_N) \in \Delta_N(X)$ und $U \subset \mathbb{C}^N$ offen, mit α_{T_j} die stetige lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{T_j} : \mathcal{C}^\infty(U, X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(U, X) \\ (\alpha_{T_j}(f))(z) & := & (z_j - T_j)f(z) \quad \text{für } z \in U. \end{array}$$

Dies führt wieder zu einer stetigen linearen Abbildung auf den p-Formen

$$\begin{array}{rcl} \alpha_T^p : \Lambda^p[\sigma, \mathcal{C}^\infty(U, X)] & \longrightarrow & \Lambda^{p+1}[\sigma, \mathcal{C}^\infty(U, X)] \\ \eta & \mapsto & \left(\sum_{j=1}^N \alpha_{T_j} s_j \right) \wedge \eta. \end{array}$$

Es gilt insbesondere $\alpha_T^p(\Lambda^p[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]) \subset \Lambda^{p+1}[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$.
Man beachte hier schon die Verbindung mit der Abbildung $\gamma^p(T)$:

$$\alpha_T^p(f\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p})(z) = \gamma^p(z - T)(f(z)\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}) \quad \text{für } z \in U. \tag{3.5}$$

Bezeichnet $\sigma \cup d\bar{z}$ das System $(s_1, \ldots, s_N, d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_N)$, so definiert man die Summe der obigen Abbildungen als

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^p : \Lambda^p[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U, X)] & \longrightarrow & \Lambda^{p+1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U, X)] \\ \omega & \mapsto & \left(\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j + \alpha_{T_j} s_j \right) \right) \wedge \omega. \end{array}$$

Die Definition des Taylorspektrums und Aussage 3.3 zeigen, daß für $T \in \Delta_N(X)$ und jede offene Menge $V \subset \rho(T)$ der Komplex

$$0 \longrightarrow \Lambda^0[\sigma, \mathcal{C}^\infty(V, X)] \xrightarrow{\alpha_T^0} \ldots \xrightarrow{\alpha_T^{N-1}} \Lambda^N[\sigma, \mathcal{C}^\infty(V, X)] \longrightarrow 0$$

exakt ist (verwende die Aussagen koeffizientenweise). Wie Taylor in [27] gezeigt hat, ist dann auch

$$0 \longrightarrow \Lambda^0[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V, X)] \xrightarrow{(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^0} \ldots \xrightarrow{(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{2N-1}} \Lambda^{2N}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V, X)] \longrightarrow 0$$

exakt, also

$$H^p(\mathcal{C}^\infty(V, X), \alpha_T \oplus \bar{\partial}) = 0 \quad \text{für } 0 \leq p \leq 2N,\ V \subset \rho(T) \text{ offen.} \tag{3.6}$$

Nun haben wir alle notwendigen Bezeichnungen für die Definition des Cauchy-Weil-Integrals, welches die Grundlage des Funktionalkalküls bildet.

3.9 Es sei $T \in \Delta_N(X)$ und $U \subset \mathbb{C}^N$ offen mit $\sigma(T) \subset U$, weiterhin sei $f \in \mathcal{O}(U, X)$. Faßt man die N-Form

$$sf := f\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \in \Lambda^N[\sigma, \mathcal{C}^\infty(U, X)]$$

als ein Element in $\Lambda^N[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U, X)]$ vom Grad 0 in $d\bar{z}$ auf, so existiert eine Form $\chi \in \Lambda^N[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}_c^\infty(U, X)]$ mit

$$sf - \chi = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\psi$$

für ein $\psi \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U, X)]$ (d.h. sf und χ liegen in der selben Kohomologieklasse bezüglich $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}$). Das sieht man folgendermaßen:

Da $(\alpha_T \oplus \bar\partial)^N sf = 0$ ist auf U, folgt aus Beziehung (3.6) für $V = U \setminus \sigma(T)$ die Existenz von $\phi \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(V,X)]$ mit

$$(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}\phi = sf.$$

Ist h eine skalare $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, die in einer Umgebung von $\sigma(T)$ Null ist und $\operatorname{supp}(1-h) \subset V$ erfüllt, dann ist $h\phi$ auf U definiert und dort ist

$$(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}(h\phi) = h(sf) + \omega = ((h-1)\, sf + \omega) + sf$$

(mit einer N-Form ω mit kompaktem Träger, die bei der $\bar\partial$-Operation aus der Produktregel entsteht) und der erste Summand rechts ist das gesuchte χ.
Aus der Form χ sucht man nun den Term heraus, der nur den Anteil $d\bar z_1 \wedge \ldots \wedge d\bar z_N$ besitzt. Dieser Summand, er werde mit $\pi\chi$ bezeichnet, ist eine Form vom Grad N über $d\bar z$ und Koeffizienten in $\mathcal{C}_c^\infty(U,X)$. Ist $K(\pi\chi)$ die Koeffizientenfunktion von $\pi\chi$, dann definiert man als *Cauchy-Weil-Integral von f bezüglich T* das Element

$$CW(f) := (2i)^N \int_U (-1)^N K(\pi\chi)(z)\, d\lambda^N(z) \in X. \tag{3.7}$$

Daß diese Definition von der Wahl von χ unabhängig ist (h ist ja nicht eindeutig), ist eine Folgerung aus dem Stokesschen Integralsatz: Ist $\widetilde\chi$ eine weitere Form mit den Eigenschaften von χ, dann folgt

$$\chi - \widetilde\chi = (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}\, \omega$$

für eine $(N-1)$-Form ω. Daraus folgt

$$K(\pi(\chi - \widetilde\chi)) = K(\pi((\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}\, \omega)) = K(\pi(\bar\partial^{\,N-1}\omega)).$$

Nun zeigt eine kurze Rechnung, daß das reelle Differential dω einer n-Form ω schon gleich der Summe $\partial^n\omega + \bar\partial^n\omega$ ist. Da $\pi(\bar\partial^{N-1}\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \bar z_j} f_j$ ist für $\mathcal{C}^\infty(U,X)$-Funktionen f_j, können wir rechnen

$$\begin{aligned}
\int_U K(\pi(\chi - \widetilde\chi))(z)\, d\lambda^N(z) &= \int_U \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \bar z_j} f_j(z)\, d\lambda^N(z) \\
= \quad & \int_U \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \bar z_j} C f_j\, d\bar z_1 \wedge \ldots \wedge d\bar z_N \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_N \\
= \quad & \int_U \bar\partial^{\,N-1} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^N C_j f_j\, d\bar z_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar z_j} \wedge \ldots \wedge d\bar z_N \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_N}_{\eta} \Big) \\
= \quad & \int_U (\partial^{\,N-1} + \bar\partial^{\,N-1})\, \eta \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial U} \eta.
\end{aligned}$$

(Beachte, daß die Wirkung von $\partial^{\,N-1}$ auf η schon Null ist. Die Konstanten C und C_j entstehen beim Umordnen der Differentiale.) Hat η nun kompakten Träger in U, so ist das Integral gleich Null.
Da aber $\chi - \widetilde\chi$ kompakten Träger hat, so auch $(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}\, \omega$ und damit die f_j und wir sehen, daß χ und $\widetilde\chi$ in (3.7) das gleiche Ergebnis liefern.

Im folgenden Satz bezeichnet $\mathcal{O}(\sigma(T))$ die Algebra der komplexwertigen Funktionen, die in einer Umgebung des Taylorspektrums von $T \in \Delta_N(X)$ analytisch sind und $(T)''$ die Bikommutantenalgebra von T.

3.10 Taylorscher Funktionalkalkül
Für $T \in \Delta_N(X)$ definiert

$$\Phi_T(f)\, x := \frac{1}{(2\pi i)^N}\, CW(f \otimes x)$$

einen Algebrenhomomorphismus $\Phi_T : \mathcal{O}(\sigma(T)) \longrightarrow (T)''$ mit

$$1 \mapsto \mathrm{id} \qquad \textit{und} \qquad \pi_i \mapsto T_i, \quad 1 \le i \le N,$$

wobei π_i die Projektion auf die i-te Koordinate ist.

Man schreibt auch $\Phi_T(f) = f(T)$ und nennt Φ_T den *analytischen Funktionalkakül* von T.

Alle Einzelheiten der obigen Konstruktion findet man in [28], ebenso die Beweise der Eigenschaften dieses Kalküls, von denen nun einige zitiert werden.

3.11 *Seien X, Y Banachräume, $T \in \Delta_N(X), S \in \Delta_N(Y)$. Sei $R \in L(X,Y)$ mit der Eigenschaft $RT_j = S_jR$ für $1 \le j \le N$ und $f \in \mathcal{O}(\sigma(T) \cup \sigma(S))$. Dann gilt $Rf(T) = f(S)R$.*

Zwei wichtige Folgerungen daraus seien erwähnt.

Ist R die Abbildung $R : X \longrightarrow X/Y$ für einen T-invarianten abgeschlossenen Unterraum Y, dann gilt $T_j^{(X/Y)}R = RT_j$ und für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ gilt daher $(f(T))^{(X/Y)} = f(T^{(X/Y)})$.

Setzt man $S_j := T_j|Y$ und $R : Y \longrightarrow X$ die Inklusionsabbildung, dann gilt $RS_j = T_jR$ für alle j und daher $Rf(S) = f(T)R$, was insbesondere $f(T)Y = f(T)RY = Rf(S)Y \subset Y$ zur Folge hat. Damit gilt

Sei $T \in \Delta_N(X)$, Y ein unter T invarianter abgeschlossener Teilraum von X und $f \in \mathcal{O}(\sigma(T) \cup \sigma(T,Y))$. Dann ist Y auch invariant unter $f(T)$.

Ein weiteres wesentliches Ergebnis der Theorie ist der spektrale Abbildungssatz.

3.12 *Sei $T \in \Delta_N(X)$, $U \subset \mathbb{C}^N$ offen mit $\sigma(T) \subset U$, $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist $f(T) := (f_1(T), \dots, f_m(T)) \in \Delta_N(X)$ und es gilt*

$$\sigma(f(T)) = \{(f_1(z), \dots, f_m(z)),\, z \in \sigma(T)\} = f(\sigma(T)).$$

Außerdem ist $\sigma(f(T), Y) = f(\sigma(T,Y))$ für einen abgeschlossenen T-invarianten Unterraum Y (beachte Folgerung in 3.11).

Auch die Existenz von Idempotenten bei nichtzusammenhängendem Spektrum hat ein Analogon in mehreren Dimensionen:

3.13 *Sei $T \in \Delta_N(X)$. Besteht das Spektrum $\sigma(T)$ aus zwei disjunkten kompakten Mengen, $\sigma(T) = K_1 \cup K_2$, dann existieren abgeschlossene, unter T hyperinvariante (d.h. invariant unter $S \in (T)'$) Unterräume X_1, X_2 von X mit*

1. *$X = X_1 \oplus X_2$,*
2. *$\sigma(T, X_1) \subset K_1$ und $\sigma(T, X_2) \subset K_2$.*

Da X_1 und X_2 abgeschlossen sind, existieren daher stetige lineare Projektionen p und q auf X mit $pX = X_1$ und $qX = X_2$.

Die Eigenschaft (β) in mehreren Veränderlichen

Wir haben im vorigen Abschnitt die Definition der holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlicher gegeben. Die Zurückführung auf die eindimensionale Definition der Holomorphie sollte dabei aber nicht zu der Annahme führen, daß die Theorien schon ähnlich parallel verlaufen wie im Reellen. Die Funktionentheorie mehrerer Variabler hält viele Ergebnisse bereit, die in einer Dimension nicht auftauchen. Das folgende Beispiel, welches auch im weiteren Verlauf von Bedeutung ist, soll das illustrieren.

3.14 Sei $U \subset \mathbb{C}^N$ offen. Dann nennt man U ein *Holomorphiegebiet*, wenn es eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ gibt mit folgender Eigenschaft: Kein Punkt des topologischen Randes von U besitzt eine Umgebung Ω, auf der eine holomorphe Funktion existiert, die auf $U \cap \Omega$ mit f übereinstimmt (d.h. f ist über keinen Randpunkt hinaus holomorph fortsetzbar).

Im Falle $N = 1$ ist jede offene Menge ein Holomorphiegebiet (siehe [18],Kap. 0.3), für $N > 1$ ist dies nicht der Fall. Z.B. ist eine Menge der Gestalt $\{z \in \mathbb{C}^N,\ r_1 < |z| < r_2\}$ für $0 < r_1 < r_2 < \infty$ kein Holomorphiegebiet, da jede darauf holomorphe Funktion auf die ganze Kugel $\{z \in \mathbb{C}^N,\ |z| < r_2\}$ holomorph fortgesetzt werden kann. Dies ist im wesentlichen der Inhalt des Satzes von Hartogs; man siehe etwa [17], Th. 2.3.2.

Eine einfache Sorte von Holomorphiegebieten sind die *Polyzylinder*. Diese sind wie folgt definiert: Ein Polyzylinder mit Multiradius $r := (r_1, \dots, r_N)$ und Mittelpunkt $a := (a_1, \dots, a_N)$ ist die Menge

$$P(a, r) := \{z \in \mathbb{C}^N,\ |z_i - a_i| \le r_i \text{ für } 1 \le i \le N\},$$

also das Produkt von N planaren Kreisscheiben.

Wir werden nun ein wichtiges Beispiel angeben, wo die Übertragung lokaler Eigenschaften gewisser Objekte auf globale i.a. nur auf Holomorphiegebieten möglich ist.

Dieses Beispiel ist ein Analogon zu 3.3 für holomorphe Funktionen. Leider ist die dortige Aussage nicht mehr in voller Allgemeinheit möglich; das gewünschte Ergebnis ist i.a. nur noch auf Holomorphiegebieten zu erwarten. Wir zitieren folgende Synthese von Theorem 2.1.8 und Corollary 2.1.9 aus [8].

3.15 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ ein Holomorphiegebiet, $\{X^p, \eta^p\}_p$ ein endlicher, über Ω analytisch parametrisierter Komplex von Banachräumen (siehe 3.2). Dann sind äquivalent:*

1. *für alle $z \in \Omega$ existiert eine offene Umgebung $U_z \subset \Omega$, so daß der Komplex $\{\mathcal{O}(U_z, X), \eta^p_*\}_p$ exakt ist,*
2. *der Komplex $\{\mathcal{O}(\Omega, X), \eta^p_*\}_p$ ist exakt.*
3. *$\{X_p, \eta^p(z)\}$ ist exakt für alle $z \in \Omega$.*

Dieser Satz sagt aus, daß für Holomorphiegebiete punktweise, lokale und globale Exaktheit analytisch parametrisierter Komplexe äquivalent sind. Man beachte, daß im Fall $N = 1$ die Aussage für alle offenen Mengen Ω gilt, da diese immmer Holomorphiegebiete sind.

3.16 (Eigenschaft β) *Sei $T \in \Delta_N(X)$. Man sagt, T hat die* Eigenschaft (β), *wenn für alle Holomorphiegebiete $U \subset \mathbb{C}^N$ der Komplex $L^\bullet_U(T, X)$ der Gestalt*

$$0 \longrightarrow \Lambda^0[\sigma, \mathcal{O}(U, X)] \xrightarrow{\alpha_T^0} \cdots \xrightarrow{\alpha_T^{N-1}} \Lambda^N[\sigma, \mathcal{O}(U, X)] \longrightarrow 0$$

die Bedingung

$$H^p(L^\bullet_U(T, X), \alpha_T) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le p \le N-1 \\ \text{separiert} & \text{für} \quad p = N \end{cases} \tag{3.8}$$

erfüllt. Dabei tragen die Kohomologiegruppen von $L_U^\bullet(T,X)$ die Quotiententopologie.
Hat der Komplex nur die Eigenschaft $H^p(L_U^\bullet(T,X),\alpha_T)=0$ für $0\leq p\leq N-1$ und alle Holomorphiegebiete U, so besitzt T die eindeutige Fortsetzungseigenschaft.

Daß dies die richtige Verallgemeinerung der Eigenschaft (β) einer Veränderlichen ist, wird in 4.16 angesprochen. Tatsächlich erhalten wir für $N=1$ die alte Definition zurück (siehe Einleitung). Man beachte dabei nur, daß der Quotient eines (F)-Raumes nach einem Unterraum genau dann wieder ein (F)-Raum ist, wenn der Unterraum abgeschlossen ist ([21], Satz 22.9). Also ist die Separiertheit der letzten Kohomologiegruppe gleichbedeutend mit der Abgeschlossenheit des Bildes der Abbildung α_T^{N-1}.

Es sei noch kurz das genaue Aussehen der Abbildung α_T^{N-1} angegeben. Da bei $(N-1)$-Formen immer nur ein Element aus σ fehlt, schreibt man ein ω aus $\Lambda^{N-1}[\sigma,\mathcal{O}(U,X)]$ in der Form

$$\omega=\sum_{j=1}^N f_j\, s_1\wedge\ldots\wedge\widehat{s_j}\wedge\ldots\wedge s_N,$$

wobei das Dach auf s_j ansagt, daß dieses Element nicht vorkommt. Anwenden von α_T^{N-1} liefert nun

$$\alpha_T^{N-1}\,\omega=\sum_{j=1}^N(-1)^{j-1}\alpha_{T_j} f_j\, s_1\wedge\ldots\wedge s_N. \tag{3.9}$$

Im Hinblick auf spätere Kapitel wollen wir noch eine Ausnahmemenge in der Definition von (β) zulassen.

3.17 Definition *Sei $S\subset\mathbb{C}^N$ abgeschlossen. Wir sagen, $T\in\Delta_N(X)$ habe die Eigenschaft (β)* modulo *S, wenn (3.8) für alle Holomorphiegebiete U mit $U\cap S=\emptyset$ erfüllt ist.*

Nicht jedes Operatortupel besitzt die Eigenschaft (β). Trotzdem ist die Bedingung (3.8) für gewisse Holomorphiegebiete immer erfüllt.

3.18 Satz *Sei $T\in\Delta_N(X)$, Ω Holomorphiegebiet mit $\sigma(T)\subset\Omega$. Dann gilt (3.8).*

▷**Beweis:** Für $N=1$ ist das eine einfache Folgerung aus dem Maximumprinzip, der Beweis in mehreren Veränderlichen ist aufwendiger; die Aussage wurde für den Fall $\Omega=$ Polyzylinder schon von Frunză ([14]) bewiesen.

Zunächst sei ein funktionentheoretisches Hilfsmittel zitiert. Es handelt sich dabei um eine vektorwertige Form des Heferschen Lemmas. Der Beweis beruht auf der Abänderung des skalaren Beweises (etwa aus [18], Cor. 5.3.2) auf den X-wertigen Fall.

Hefers Lemma
Es sei Ω ein Holomorphiegebiet in $\mathbb{C}^N$ und $f\in\mathcal{O}(\Omega,X)$ für einen Banachraum X. Dann existieren Funktionen $g_j\in\mathcal{O}(\Omega\times\Omega,X)$, $1\leq j\leq N$, so daß für alle $z,w\in\Omega$ gilt

$$f(w)-f(z)=\sum_{j=1}^N(w_j-z_j)\,g_j(z,w).$$

Es bezeichne im folgenden $\mathcal{O}(\sigma(T),X)$ die auf einer Umgebung von $\sigma(T)$ holomorphen X-wertigen Funktionen.

Satz 1
Sei $T \in \Delta_N(X)$. Dann hat das Cauchy-Weil-Integral

$$CW : \mathcal{O}(\sigma(T), X) \longrightarrow X$$

die Eigenschaften

1. $CW(1 \otimes x) = (2\pi i)^N x$,

2. *Bezeichnet $\pi_j f$ die Funktion $\pi_j f(z) := z_j f(z)$ und $T_j f$ die Funktion $(T_j f)(z) := T_j f(z)$, so gilt $CW(\pi_j f) = T_j CW(f) = CW(T_j f)$.*

Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, besteht darin, direkt in die Definition des Cauchy-Weil-Integrals zu gehen (wie dies beim Beweis des Taylor-Kalküls der Fall ist). Hat man den Funktionalkalkül aber schon zur Hand, kann auch folgendermaßen argumentiert werden: Nach [15], chap.2, S.81, ist $\mathcal{O}(U)\widehat{\otimes}_\pi X = \mathcal{O}(U, X)$. Da die Teilnehmer dieses Tensorprodukts metrische Räume sind, ist jedes $f \in \mathcal{O}(U, X)$ darstellbar als normkonvergente Reihe $f = \sum_{k=1}^\infty f_k \otimes x_k$, wo $f_k \in \mathcal{O}(U)$ und $x_k \in X$ (siehe etwa [25], §3, Th.6.4). Dann ist z.B.

$$\begin{aligned} CW(T_j f) &= CW\big(\sum f_k \otimes (T_j x_k)\big) \overset{(*)}{=} \sum f_k(T)(T_j x_k) \\ &= T_j\big(\sum f_k(T) x_k\big) = T_j\big(\sum CW(f_k \otimes x_k)\big) = T_j\, CW(f). \end{aligned}$$

Dabei wurde in $(*)$ die Stetigkeit von CW verwendet (daher die Vertauschung mit der Summe) und die Definition des Taylorkalküls einschließlich der Tatsache, daß jedes T_j mit $f(T)$ kommutiert.

Damit kann man beweisen (siehe auch [12]):

Satz 2
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ ein Holomorphiegebiet mit $\sigma(T) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega, X)$. Die N-Form $f\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \in \Lambda^N(\mathcal{O}(\Omega, X))$ ist genau dann im Bild der Abbildung α_T^{N-1}, wenn $CW(f) = 0$ ist.

Beweis: Die Definition von α_T^{N-1} macht sofort deutlich, daß $f\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N$ genau dann im Bild von α_T^{N-1} liegt, wenn es Funktionen $h_j \in \mathcal{O}(\Omega, X)$ gibt mit

$$f(w) = \sum_{j=1}^N (w_j - T_j)\, h_j(w) \quad \text{für alle } w \in \Omega.$$

Sei $CW(f) = 0$. Das Hefersche Lemma in vektorwertiger Form liefert uns eine Darstellung

$$f(w) - f(z) = \sum_{j=1}^N (w_j - z_j)\, g_j(z, w) \quad \text{für alle } z, w \in \Omega.$$

Betrachten wir z als Variable, so ist nach Anwenden von CW (Satz 1)

$$(2\pi i)^N f(w) = \sum_{j=1}^N (w_j - T_j)\, CW(g_j(., w)) \quad \text{für alle } w \in \Omega.$$

Das Cauchy-Weil-Integral einer Funktion $g \in \mathcal{O}(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$ bezüglich der Ω_1-Koordinate liegt aber in $\mathcal{O}(\Omega_2, X)$ (siehe [28], Bemerkung nach Definition 3.5). Das beweist eine Richtung.

Die Umkehrung folgt direkt, da nach Satz 1 gilt

$$CW[(\pi_j - T_j)\, g_j] = (T_j - T_j)\, CW(g_j) = 0$$

Die Situation ist nun klar. Da das Bild von α_T^{N-1} der Kern einer stetigen linearen Abbildung ist, muß es abgeschlossen sein.

Es fehlt nun noch die Exaktheit von $L_\Omega^\bullet(T,X)$ an den ersten $N-1$ Stellen. Dies wurde, wie schon erwähnt, von Frunză gezeigt (siehe auch [31], Theorem IV,2.5). Also gilt die Exaktheit lokal und die globale Aussage kann aus 3.15 gewonnen werden. ∎

Eine direkte Folgerung aus 3.15 ergänzt die Aussage von Satz 3.18.

3.19 *Sei $T \in \Delta_N(X)$, U ein Holomorphiegebiet mit $U \cap \sigma(T) = \emptyset$. Dann ist $L_U^\bullet(T,X)$ exakt und damit gilt (3.8).*

▷**Beweis:** Nach Definition des Spektrums (3.5) ist für $z \in U$ der Komplex

$$0 \longrightarrow \Lambda^0[\sigma,X] \overset{\gamma^0(z-T)}{\longrightarrow} \cdots \overset{\gamma^{N-1}(z-T)}{\longrightarrow} \Lambda^N[\sigma,X] \longrightarrow 0$$

exakt. Zudem hängt $\gamma^p(z-T)$ analytisch von z ab. Daher folgt mit 3.15 (komponentenweise angewandt; man benutze $\Lambda^p[\sigma,\mathcal{O}(U,X)] \equiv \mathcal{O}(U,X)^{\binom{N}{p}}$) die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \Lambda^0[\sigma,\mathcal{O}(U,X)] \overset{\gamma_*^0(T)}{\longrightarrow} \cdots \overset{\gamma_*^{N-1}(T)}{\longrightarrow} \Lambda^N[\sigma,\mathcal{O}(U,X)] \longrightarrow 0$$

Berücksichtigt man noch (3.5), so folgt $\gamma_*^p(T) = \alpha_T^p$ und damit die Behauptung. ∎

Die am Schluß des Beweises gemachte Bemerkung wollen wir noch einmal für spätere Zwecke für $p = N-1$ gesondert erwähnen:

3.20 *Es sei $T \in \Delta_N(X)$. Ist $\gamma^{N-1}(z-T) : \Lambda^{N-1}[\sigma,X] \longrightarrow \Lambda^N[\sigma,X]$ surjektiv für alle z in einer offenen Menge V, dann ist der in 3.3 definierte Operator $\gamma_*^{N-1}(T)$ schon gleich α_T^{N-1}.*

§4 S-zerlegbare Operatortupel

Spektrale Kapazitäten

Die folgende Ausführungen stammen im wesentlichen aus Kapitel IV von [31].

4.1 Definition *Sei Ω eine Teilmenge von $\mathbb{C}^N$. Eine Familie $\mathcal{F}$ abgeschlossener Teilmengen von Ω heißt* Pseudoring auf Ω, *falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,
2. *wenn* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, *dann* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
3. *zu jedem* $F \in \mathcal{F}$ *existiert eine Folge offener Mengen* $\{G_j\}_j$ *in* Ω, *so daß* $\overline{G}_j \in \mathcal{F}$ *für alle* j *und* $\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{G}_j = F$,
4. *zu jedem* $F \in \mathcal{F}$ *und* $G_1 \subset \Omega$ *offen mit* $F \subset G_1$ *und* $\overline{G}_1 \in \mathcal{F}$ *existiert eine offene Menge* G_2 *in* Ω *derart, daß* $\overline{G}_2 \in \mathcal{F}$, $\overline{G}_2 \cap F = \emptyset$ *und* $G_1 \cup G_2 = \Omega$.

Die für uns interessanten Beispiele von Pseudoringen sind:

- $\mathcal{F} = \{F \subset \Omega, \overline{F} = F\} =: \mathcal{F}_{\emptyset,\Omega}$, die Familie aller Ω-abgeschlossenen Mengen in Ω, und
- $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{F}_{\emptyset,\Omega},\ F \supset S$ oder $F \cap S = \emptyset\} =: \mathcal{F}_{S,\Omega}$, für eine in Ω abgeschlossene Menge S.

Dabei setzen wir noch $\mathcal{F}_\emptyset := \mathcal{F}_{\emptyset,\mathbb{C}^N}$ und $\mathcal{F}_S := \mathcal{F}_{S,\mathbb{C}^N}$. Es ist $\mathcal{F}_{\emptyset,\Omega} = \mathcal{F}_{S,\Omega}$ für $S = \emptyset$. Man beachte außerdem, daß für eine Folge $\{F_j\}_j \subset \mathcal{F}_{S,\Omega}$ schon $\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{F}_{S,\Omega}$ ist.

Die Pseudoringe abgeschlossener Mengen sind die Definitionsbereiche der spektralen Kapazitäten. Wir interessieren uns für den Fall $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{S,\Omega}$. Es sei X ein Banachraum und $\mathcal{S}(X)$ die Familie aller abgeschlossenen Unterräume von X.

4.2 Definition *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, $m \in \mathbb{N}$. *Eine Abbildung* $\mathcal{B} : \mathcal{F}_{S,\Omega} \longrightarrow \mathcal{S}(X)$ *heißt* m-spektrale Kapazität auf $\mathcal{F}_{S,\Omega}$, *falls gilt:*

1. $\mathcal{B}(\emptyset) = \{0\}$ *und* $\mathcal{B}(\Omega) = X$,
2. *es ist* $\mathcal{B}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}(F_j)$ *für* $\{F_j\}_j \subset \mathcal{F}_{S,\Omega}$
3. *zu jeder offenen Überdeckung* $\{G_k\}_{k=1,\ldots,m}$ *von* Ω *der Länge* m, *die entweder* $S \subset G_k$ *oder* $\overline{G}_k \cap S = \emptyset$ *erfüllt, existiert eine Zerlegung*

$$X = \mathcal{B}(\overline{G}_1) + \cdots + \mathcal{B}(\overline{G}_m).$$

Eine Überdeckung der Gestalt wie in 3. nennen wir *S-zulässig*. Eine Ω-offene Menge G heißt entsprechend *S-zulässig*, wenn $S \subset G$ bzw. $\overline{G} \cap S = \emptyset$ ist.

Eine erste Folgerung aus dieser Definition ist:
Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{S,\Omega}$ mit $F_1 \subset F_2$, so ist nach 2.

$$\mathcal{B}(F_1) = \mathcal{B}(F_1 \cap F_2) = \mathcal{B}(F_1) \cap \mathcal{B}(F_2) \subset \mathcal{B}(F_2). \tag{4.1}$$

Unter zusätzlichen Voraussetzungen an $\mathcal{B}$ erhält man eine wichtige Klasse von Operatoren.

4.3 Definition *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, $m \in \mathbb{N}$ und $T \in \Delta_N(X)$. Dann heißt T (m, S)-*zerlegbar *auf Ω, falls eine m-spektrale Kapazität $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{F}_{S,\Omega}$ existiert mit folgenden Eigenschaften:*

1. *die Räume $\mathcal{B}(F)$ sind invariant unter T für alle $F \in \mathcal{F}_{S,\Omega}$,*
2. *es gilt $\sigma(T, \mathcal{B}(F)) \subset F$ für alle $F \in \mathcal{F}_{S,\Omega}$.*

*Ist T (m, S)-zerlegbar auf Ω für alle $m \in \mathbb{N}$, so nennt man T S-*zerlegbar *auf Ω.*

Insbesondere heißt T *S-zerlegbar*, falls $\Omega = \mathbb{C}^N$ und *zerlegbar*, falls $\Omega = \mathbb{C}^N$ und $S = \emptyset$ (und damit $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_\emptyset$) ist. Ist ein Tupel T (m, S)-zerlegbar auf Ω, so muß nach dieser Definition schon $\sigma(T) \subset \Omega$ sein.

Jedes Operatortupel T ist $\sigma(T)$-zerlegbar, denn eine zugehörige spektrale Kapazität ist etwa $\mathcal{B}(F) := X$ für alle F mit $\sigma(T) \subset F$ und $\{0\}$ sonst.

Die Theorie der zerlegbaren Operatoren wird für den Fall eines Operators in [11] begonnen und in [4] fortgeführt. Der Übergang auf Operatortupel wird erstmals in [14] durchgeführt (eine englische Übersetzung findet man in [12] und [13]).

Wir werden im nächsten Abschnitt einige Resultate aus der Theorie der zerlegbaren Operatortupel auf die S-zerlegbaren übertragen. Dies wurde teilweise schon in Kapitel IV von [31] in einem allgemeinen Rahmen gemacht. Es muß aber beachtet werden, daß unsere Definition der S-Zerlegbarkeit nicht in das dortige Schema der allgemeinen Zerlegbarkeitsdefinition (Kap. IV,1) paßt, da die S-zulässigen Überdeckungen anders definiert sind. Trotzdem sind die Beweise der uns interessierenden Aussagen ohne Schwierigkeiten übertragbar und wir werden diese Ergebnisse nur zitieren.
Die Ausnahmemenge S sei dabei in Zukunft immer eine Teilmenge des Spektrums des betrachteten Operatortupels.

Bevor wir dies in Angriff nehmen, wollen wir noch ein für spätere Zwecke wichtiges Ergebnis zitieren.

Dazu sei $T \in L(X)$ ein einzelner Operator (kein Tupel!) und Y ein abgeschlossener Unterraum von X, der unter T invariant ist. Dann bezeichne $T^{(X/Y)}$ den induzierten Operator

$$T^{(X/Y)} : X/Y \longrightarrow X/Y, \qquad [x] \mapsto [Tx]. \tag{4.2}$$

Wohldefiniertheit, Linearität und Stetigkeit dieses induzierten Operators sind bekannt. Ist $T = (T_1, \ldots, T_N) \in \Delta_N(X)$ und Y abgeschlossen und invariant unter T, dann soll $T^{(X/Y)}$ natürlich das Tupel $(T_1^{(X/Y)}, \ldots, T_N^{(X/Y)})$ bezeichnen, welches in $\Delta_N(X/Y)$ liegt.

4.4 *([31],Beweis von Th. IV.1.9) Sei $T \in \Delta_N(X)$ $(2, S)$-zerlegbar über Ω mit spektraler Kapazität $\mathcal{B}$. Sei $\{G_1, G_2\}$ eine offene, S-zulässige Überdeckung von Ω. Dann gilt $\sigma(T^{(X/\mathcal{B}(\overline{G}_1))}) \subset \overline{G}_2$.*

4.5 *Sei $T \in \Delta_N(X)$ ein $(2, S)$-zerlegbares Operatortupel. Dann gilt für $F \in \mathcal{F}_S$ mit $F \cap S = \emptyset$ oder $S \subset \mathring{F}$:*

$$\sigma(T^{(X/\mathcal{B}(F))}) \subset \mathbb{C}^N \setminus \mathring{F}.$$

$\triangleright$ **Beweis:** Sei H eine offene Menge, so daß $\{H, \mathring{F}\}$ eine S-zulässige Überdeckung von $\mathbb{C}^N$ ist. Dann ist nach 4.4 $\sigma(T^{(X/\mathcal{B}(F))}) \subset \overline{H}$. Wähle also eine Folge $\{H_j\}_j$ von offenen Mengen, so daß jedes H_j die Eigenschaften von H hat und $\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{H}_j = \mathbb{C}^N \setminus \mathring{F}$ (siehe Definition 4.1,3). Dann ist $\sigma(T^{(X/\mathcal{B}(F))}) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{H}_j = \mathbb{C}^N \setminus \mathring{F}$. ∎

Erste Resultate für S-zerlegbare Tupel

Das erste Ergebnis betrifft die Eindeutigkeit spektraler Kapazitäten.

4.6 *Sei $T \in \Delta_N(X)$ (m, S)-zerlegbar über Ω, $m \geq 2$. Dann hat dieses System genau eine spektrale Kapazität.*

Die Aussage ist für $m = 1$ falsch. Im übrigen ist jeder Operator $(1, S)$-zerlegbar.

Korollar: Sei $\mathcal{B}$ die in der Situation von 4.6 eindeutig bestimmte spektrale Kapazität von T. Dann haben die Räume $\mathcal{B}(F)$ die Eigenschaft:
Ist $Z \in \mathcal{S}(X)$ invariant unter T und erfüllt die Bedingung $\sigma(T, Z) \subset \sigma(T, \mathcal{B}(F))$, dann ist schon $Z \subset \mathcal{B}(F)$.

Unterräume, die diese Eigenschaft besitzen nennt man auch *spektralmaximal*.
Eine weitere Folgerung aus 4.6 stellt einen ersten Zusammenhang zwischen der spektralen Kapazität von T und dem Spektrum $\sigma(T)$ her.

4.7 *Unter den Voraussetzungen von 4.6 sei $F \in \mathcal{F}_{S,\Omega}$ mit $F \cap \sigma(T) = \emptyset$. Dann ist $\mathcal{B}(F) = \{0\}$.*

Der nun einzuführende Begriff des lokalen Spektrums eines Elementes $x \in X$ wird eine Darstellung der Mengen $\mathcal{B}(F)$ ermöglichen.

4.8 Definition *Sei $T \in \Delta_N(X)$ ein (m, S)-zerlegbares Tupel über Ω mit spektraler Kapazität $\mathcal{B}$, $m \geq 2$. Sei $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{S,\Omega}$. Dann heißt die Menge*

$$\sigma_{\mathcal{F},T}(x) := \bigcap \{F \in \mathcal{F},\, x \in \mathcal{B}(F)\}$$

lokales Spektrum *von x bez. T und $\mathcal{F}$.*

Es ist immer $\sigma_{\mathcal{F},T}(x) \in \mathcal{F}$.

4.9 Lemma *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ kompakt, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{S,\Omega}$. Ist $T \in \Delta_N(X)$ ein (m, S)-zerlegbares Tupel mit spektraler Kapazität $\mathcal{B}$, dann gilt für alle $H \in \mathcal{F}$ die Gleichheit*

$$\mathcal{B}(H) = \{x \in X,\, \sigma_{\mathcal{F},T}(x) \subset H\}.$$

$\triangleright$**Beweis:** Die Beziehung $\subset$ ist offensichtlich. Für die Umkehrung betrachte man ein $x \in \mathcal{B}(H)$ beliebig und eine Ω-offene Menge G mit $\sigma_{\mathcal{F},T}(x) \subset G$. Die Definition von $\sigma_{\mathcal{F},T}(x)$ liefert

$$\Omega \setminus G \subset \bigcup \{\Omega \setminus F,\, x \in \mathcal{B}(F)\}$$

und die Kompaktheit von $\Omega \setminus G$

$$\Omega \setminus G \subset \bigcup_{endl.} \{\Omega \setminus F,\, x \in \mathcal{B}(F)\}.$$

Das heißt aber

$$K := \bigcap_{endl.} \{F,\, x \in \mathcal{B}(F)\} \subset G.$$

Wir haben also eine kompakte Menge $K \in \mathcal{F}$ gefunden mit

$$\sigma_{\mathcal{F},T}(x) \subset K \subset G \text{ und } x \in \mathcal{B}(K).$$

Wegen Definition 4.1,3 können wir eine Folge $\{G_j\}_j$ offener Mengen in Ω finden mit $\overline{G}_j \in \mathcal{F}$ und $\bigcap \overline{G}_j = \sigma_{\mathcal{F},T}(x)$. Dazu existiert - wie gerade gezeigt - eine Folge $\{K_j\}_j \subset \mathcal{F}$ mit $\sigma_{\mathcal{F},T}(x) \subset K_j \subset G_j$, und daher

$$\sigma_{\mathcal{F},T}(x) = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Da aber auch $x \in \mathcal{B}(K_j)$ für alle j, folgt

$$x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}(K_j) \overset{4.2,2}{=} \mathcal{B}(\sigma_{\mathcal{F},T}(x)) \overset{(4.1)}{\subset} \mathcal{B}(H). \qquad \blacksquare$$

4.10 Zuweilen betrachtet man noch zwei andere Formen von lokalen Spektren, das sog. *analytische lokale Spektrum*

$$\begin{aligned}\omega_T(x) := \mathbb{C}^N \setminus \{z \in \mathbb{C}^N, &\text{ es exist. Umgebung } U \text{ von } z \text{ und}\\ \varphi_1, \ldots, \varphi_N \in \mathcal{O}(U,X) &\text{ mit } 1 \otimes x = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{T_j} \varphi_j \text{ auf } U\}\end{aligned}$$

und das sog. *glatte lokale Spektrum*

$$\begin{aligned}\gamma_T(x) := \mathbb{C}^N \setminus \{z \in \mathbb{C}^N, &\text{ es exist. Umgebung } U \text{ von } z \text{ und}\\ \psi \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U,X)] &\text{ mit } sx := x\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\, \psi\}.\end{aligned}$$

Folgende Beziehung wird für den Beweis des Trägersatzes 5.7 wichtig sein.

4.11 Proposition *Sei Ω kompakt in $\mathbb{C}^N$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{S,\Omega}$. Für ein $(2,S)$-zerlegbares Tupel T über Ω gilt:*

(i) Falls $S \subset \sigma_{\mathcal{F},T}(x)$, dann ist $\sigma_{\mathcal{F},T}(x) = \omega_T(x) \cup S$.

(ii) Falls $S \cap \sigma_{\mathcal{F},T}(x) = \emptyset$, dann ist $\sigma_{\mathcal{F},T}(x) = \omega_T(x)$.

$\triangleright$**Beweis:** $\omega_T(x) \subset \sigma_{\mathcal{F},T}(x)$: Ist $\lambda \notin \sigma(T, \mathcal{B}(\sigma_{\mathcal{F},T}(x)))$, dann ist nach 3.19 und 3.20 die Abbildung

$$\alpha_T^{N-1} : \Lambda^{N-1}[\sigma, \mathcal{O}(U, \mathcal{B}(\sigma_{\mathcal{F},T}(x)))] \longrightarrow \Lambda^N[\sigma, \mathcal{O}(U, \mathcal{B}(\sigma_{\mathcal{F},T}(x)))]$$

surjektiv für einen Polyzylinder $U \ni \lambda$. Da aber $x \in \mathcal{B}(\sigma_{\mathcal{F},T}(x))$ (Lemma 4.9), folgt die Existenz von Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in \mathcal{O}(U,X)$ mit $x = \sum_{j=1}^N \alpha_{T_j} \varphi_j$ auf U (siehe (3.9)). Also $\omega_T(x) \subset \sigma(T, \mathcal{B}(\sigma_{\mathcal{F},T}(x)))$. Aber nach Definition der spektralen Kapazität ist schon $\sigma(T, \mathcal{B}(\sigma_{\mathcal{F},T}(x))) \subset \sigma_{\mathcal{F},T}(x)$, und das ist die Behauptung.

Es sei $\lambda \in \Omega \setminus (\omega_T(x) \cup S)$. Dann existiert eine Umgebung U von λ mit $U \cap (\omega_T(x) \cup S) = \emptyset$ (und damit $\operatorname{int}(U \cap \Omega) \neq \emptyset$) und Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in \mathcal{O}(U,X)$ mit

$$\sum_{j=1}^{N} (z_j - T_j)\, \varphi_j(z) = x \qquad \text{für alle } z \in U. \tag{4.3}$$

Wir wählen dazu zwei offene Mengen G_1, G_2 in Ω mit $G_2 \subset\subset U$ sowie $G_1 \cup G_2 = \Omega$. Dies ist offensichtlich eine S-zulässige offene Überdeckung von Ω und wegen 4.4 erhalten wir

$$\sigma(T^{(X/\mathcal{B}(\overline{G}_1))}) \subset \overline{G}_2 \subset U. \tag{4.4}$$

Wir wollen zeigen, daß das Bild von x unter der kanonischen Abbildung

$$\theta : X \longrightarrow X/\mathcal{B}(\overline{G}_1), \quad \theta(x) := x + \mathcal{B}(\overline{G}_1)$$

schon gleich Null ist.

Wenden wir in (4.3) auf beiden Seiten die Abbildung θ an, erhalten wir

$$\theta(x) = \sum_{j=1}^{N} (z_j - T_j^{(X/\mathcal{B}(\overline{G}_1))})\, \theta(\varphi_j(z)) \qquad \text{für alle } z.$$

Dabei ist zu beachten, daß die Funktionen $z \mapsto \theta(\varphi_j(z))$ wieder holomorph sind, da θ linear und stetig ist. Nun folgt nach Anwendung des Cauchy-Weil-Integrals bezüglich $T^{(X/\mathcal{B}(\overline{G}_1))}$ und der Variablen z unter der Berücksichtigung von Satz 2 aus dem Beweis von Satz 3.18 (man beachte dazu auch (4.4))

$$0 = CW(1 \otimes \theta(x)) = \theta(x).$$

Das bedeutet $x \in \mathcal{B}(\overline{G}_1)$. Diese Überlegung können wir für jeden Punkt $\lambda \in \Omega \setminus \{\omega_T(x) \cup S\}$ anstellen und die Konstruktion von G_1 zeigt, daß man so eine Folge $\{G_j\}_j$ von offenen Mengen finden kann, so daß $x \in \mathcal{B}(\overline{G}_j)$ für alle j und $\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{G}_j = \omega_T(x) \cup S$. Dann ist $x \in \mathcal{B}(\omega_T(x) \cup S)$. Mit Lemma 4.9 folgt $\sigma_{\mathcal{F},T}(x) \subset \omega_T(x) \cup S$. Unter Berücksichtigung der beiden Fälle (i) und (ii) folgt dann die Behauptung. ■

In [5] hat Eschmeier gezeigt, daß für $T \in \Delta_N(X)$ die Beziehung $\gamma_T(x) = \omega_T(x)$ gilt. Lemma 4.9 zusammen mit der vorigen Proposition liefert daher

4.12 Korollar *Ist $T \in \Delta_N(X)$ ein $(2, S)$-zerlegbares Tupel über einer kompakten Menge, dann gilt für die spektrale Kapazität*

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{B}(F) & = & \{x \in X,\, \gamma_T(x) \subset F\} & \textit{falls } S \subset F, \\ \mathcal{B}(F) & \subset & \{x \in X,\, \gamma_T(x) \subset F\} & \textit{falls } S \cap F = \emptyset. \end{array}$$

Da für $S \cap F = \emptyset$ nur die Beziehung $\subset$ gegeben ist, kann man mit 4.12 i.a. nicht entscheiden, ob ein Element $x \in X$ in einem Spektralraum $\mathcal{B}(F)$ liegt, dazu wäre die umgekehrte Relation nötig.

Bei genauer Inspektion des Beweises von 4.11 sieht man, daß ein wesentliches Problem darin liegt, daß lokale Lösungen von $x\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\psi$ nicht auf einer Umgebung von S zusammengesetzt werden können. Daher liegt der Gedanke nahe, direkt mit globalen Lösungen dieser Gleichung zu arbeiten. Dies werden wir in Paragraph 6 tun, wo weitere Hilfsmittel zur Verfügung stehen.

Daß alle lokalen Spektren schon im Taylorspektrum von T enthalten sind, entnimmt man man folgendem Ergebnis, das den Zusammenhang zwischen spektraler Kapazität und Spektrum vollends aufklärt.

4.13 Lemma *Sei $T \in \Delta_N(X)$ ein S-zerlegbares Operatortupel mit spektraler Kapazität $\mathcal{B}$. Dann gilt $\mathcal{B}(\sigma(T)) = X$.*

$\triangleright$**Beweis:** Seien G, H offen mit $G \supset \sigma(T)$, $\overline{H} \cap \sigma(T) = \emptyset$ und $G \cup H = \mathbb{C}^N$ (Definition 4.1,4). Dann ist

$$X = \mathcal{B}(\overline{G}) + \mathcal{B}(\overline{H}) \overset{4.7}{=} \mathcal{B}(\overline{G}). \tag{4.5}$$

Wegen Def. 4.1,3 können wir eine Folge $\{G_j\}_j$ offener Mengen mit $\overline{G}_j \in \mathcal{F}_S$ und $\sigma(T) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{G}_j$ wählen, so daß alle G_j die Eigenschaft von obigem G haben. Zusammen mit (4.5) liefert das

$$X = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}(\overline{G}_j) = \mathcal{B}(\sigma(T)) \qquad \blacksquare$$

Damit kann man $\sigma(T)$ als Träger der spektralen Kapazität ansehen:
Einerseits kann man sich bei S-zerlegbaren Tupeln auf Ω auf das Spektrum zurückziehen, da für $F \in \mathcal{F}_{S,\Omega}$ schon $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(F) \cap \mathcal{B}(\sigma(T)) = \mathcal{B}(F \cap \sigma(T))$ gilt. Andererseits kann man eine $\mathcal{F}_{S,\sigma(T)}$-spektrale Kapazität $\mathcal{B}$ vermöge $\mathcal{B}^*(F) := \mathcal{B}(F \cap \sigma(T))$ auf $\mathcal{F}_{S,\Omega}$ fortsetzen. Also ist ein Tupel $T \in \Delta_N(X)$ genau dann S-zerlegbar auf Ω, wenn es $\mathcal{F}_{S,\sigma(T)}$-zerlegbar ist.

Daraus folgt nun insbesondere

4.14 Korollar *Lemma 4.9, Proposition 4.11 und Korollar 4.12 gelten auch für S-zerlegbare Tupel.*

Nun wollen wir noch das Verhalten S-zerlegbarer Tupel unter dem analytischen Funktionalkalkül studieren.

4.15 Satz *Sei T ein (m, S)-zerlegbares Tupel mit spektraler Kapazität $\mathcal{B}$, $U \supset \sigma(T)$ offen und $f := (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{O}(U)^m$. Dann ist $f(T) := (f_1(T), \ldots, f_m(T))$ schon $(m, \overline{f(S)})$-zerlegbar.*

$\triangleright$**Beweis:** Zuerst bemerken wir, daß wegen 3.12 schon $\overline{(f_1(S), \ldots, f_m(S))} = \overline{f(S)} \subset \sigma(f(T))$ ist. Wir setzen

$$\mathcal{B}^*(F) := \mathcal{B}(f^{-1}(F) \cap \sigma(T)), \qquad \text{für } F \in \mathcal{F}_{\overline{f(S)}}$$

und zeigen, daß dies eine $(m, \overline{f(S)})$-spektrale Kapazität von $f(T)$ ist.

1. Zuerst überzeugt man sich schnell davon, daß $f^{-1}(F) \cap \sigma(T)$ wieder in $\mathcal{F}_{S,\sigma(T)}$ ist für $F \in \mathcal{F}_{\overline{f(S)}}$.

2. $\mathcal{B}^*(\emptyset) = \mathcal{B}(\emptyset) = \{0\}$; $X = \mathcal{B}(\sigma(T)) = \mathcal{B}(\sigma(T) \cap f^{-1}(\mathbb{C}^N)) = \mathcal{B}^*(\mathbb{C}^N)$.

3. Sei $\{U_1, \ldots, U_m\}$ eine $\overline{f(S)}$-zulässige offene Überdeckung von $\mathbb{C}^N$. Dann ist $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_m)\}$ eine S-zulässige offene Überdeckung von $\sigma(T)$. Das bedeutet, daß
$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{B}^*(\overline{U}_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{B}(f^{-1}(\overline{U}_i) \cap \sigma(T)) \subset \sum_{i=1}^{m} \mathcal{B}(\overline{f^{-1}(U_i)} \cap \sigma(T)) = X$$
denn $\{\operatorname{int}(f^{-1}(U_i) \cap \sigma(T))\}$ ist eine S-zulässige Überdeckung von $\sigma(T)$.

4. Nach Definition ist $\mathcal{B}^*(F)$ invariant unter dem Tupel T. Nach der Folgerung in 3.11 ist $\mathcal{B}^*(F)$ damit auch invariant unter $f(T)$ (beachte, daß $\sigma(T, \mathcal{B}(f^{-1}(F))) \subset \sigma(T)$).

5. Es ist
$$\begin{aligned} \sigma(f(T), \mathcal{B}^*(F)) &= f(\sigma(T, \mathcal{B}^*(F)) \quad \text{wegen 3.12} \\ &= f(\sigma(T, \mathcal{B}(f^{-1}(F))) \\ &\subset f(f^{-1}(F)) \subset F. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{B}^*$ als $(m, \overline{f(S)})$-spektrale Kapazität von $f(T)$ erkannt. ∎

S-Zerlegbarkeit und Eigenschaft (β)

4.16 Schon in der Einleitung wurde der Zusammenhang von Zerlegbarkeit und Eigenschaft (β) für einen einzelnen Operator angesprochen. Albrecht und Eschmeier zeigten in [2], daß ein einzelner Operator auf einem Banachraum genau dann die Eigenschaft (β) hat, wenn er Restriktion eines zerlegbaren Operators ist (also subzerlegbar). In [14] hat Frunză bewiesen, daß zerlegbare Operatortupel (im Sinne der Definition 4.3) schon die Eigenschaft (β) nach Definition 3.16 besitzen. Das rechtfertigt auch die Bezeichnung in 3.16. Um auch hier eine Umkehrung formulieren zu können, muß zuerst ein geeigneter Ersatz für die Subzerlegbarkeit gefunden werden. Dies führt zum Begriff der endlichen zerlegbaren Auflösung eines Tupels. Diese Theorie wurde von Eschmeier und Putinar entwickelt und findet sich in [8], Kap.6.

Wir wollen nun auch eine Beziehung herstellen zwischen der S-Zerlegbarkeit eines Operatortupels T und der Eigenschaft (β) modulo S (siehe 3.17). Genauer werden wir zeigen:

4.17 Satz *Ein $(2, S)$-zerlegbares Operatortupel $T \in \Delta_N(X)$ besitzt die Eigenschaft (β) modulo S.*

Nach 3.16 und 3.17 sind zwei Dinge zu zeigen:

1. Das Verschwinden der ersten $N-1$ Kohomologiegruppen von $L_U^\bullet(T, X)$ für alle Holomorphiegebiete U mit $U \cap S = \emptyset$.
2. Die Abgeschlossenheit von Bild α_T^{N-1} in $\Lambda^N[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$, U wie oben.

Zum ersten Punkt: Vasilescu hat in [31], Theorem IV,2.5 gezeigt, daß für (n, S)-zerlegbare Operatortupel die Kohomologiegruppen von $L_U^\bullet$ bis zum Grade $N-1$ verschwinden für alle Polyzylinder mit Abschluß außerhalb von S. Also haben wir lokale Exaktheit von $L_U^\bullet(T, X)$ bis zur Stufe $N-1$ außerhalb von S und mit 3.15 folgt die erste Bedingung aus (3.8).

Widmen wir uns nun dem zweiten Punkt. Das folgende Resultat wird dabei entscheidend sein (man beachte die Interpretation von $\Lambda^p[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$ als Raum von Funktionen auf U). Die Beweise dieses und des nächsten Satzes beruhen auf denen von Proposition 2 und Theorem 1 aus [12].

4.18 Satz *Es sei $T \in \Delta_N(X)$ ein $(2, S)$-zerlegbares Tupel mit spektraler Kapazität $\mathcal{B}$ und U ein Holomorphiegebiet mit $U \cap S = \emptyset$. Sei $\{\psi_k\}_k$ eine Folge in $\Lambda^{N-1}[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$ mit $\alpha_T^{N-1}\psi_k \to 0$ in $\Lambda^N[\sigma, \mathcal{O}(U, X)]$. Dann existiert zu jedem Holomorphiegebiet D mit $\overline{D} \subset U$ eine Folge $\{\varphi_k\}_k$ in $\Lambda^{N-1}[\sigma, \mathcal{O}(D, X)]$ mit $\alpha_T^{N-1}\varphi_k = \alpha_T^{N-1}\psi_k$ auf D und $\varphi_k \to 0$.*

▷**Beweis:** Für den Verlauf des Beweises ist es wichtig, den Definitionsbereich der Formen, auf denen α_T^{N-1} lebt, zu kennzeichnen. Wir setzen daher $\alpha_V := \alpha_T^{N-1}$ auf $\Lambda^{N-1}[\sigma, \mathcal{O}(V, X)]$ für offenes V. Wird die Abbildung α im Bezug auf einen anderen Operator S auf einem Λ^p-Raum verwendet, so schreiben wir $\alpha_S^p(V)$. Desweiteren unterdrücken wir die Angabe von σ in den Λ^p-Räumen

1.Schritt
Wir betrachten zwei offene Mengen D_1 und D_2 mit

$$D \subset\subset D_2 \subset\subset D_1 \subset\subset U.$$

Dann ist $\{D_1, (\mathbb{C}^N \setminus D_2)^\circ\}$ eine S-zulässige Überdeckung von $\mathbb{C}^N$ und wir erhalten

$$X = \mathcal{B}(\overline{D}_1) + \mathcal{B}(\mathbb{C}^N \setminus D_2) =: X_1 + X_2.$$

Diese Zerlegung von X liefert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X_1 \cap X_2 \xrightarrow{u} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{v} X \longrightarrow 0$$

mit $u(x) := x \oplus (-x)$ und $v(x,y) := x + y$. Nach 3.15 hat das die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{u_*} \mathcal{O}(U, X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{v_*} \mathcal{O}(U, X) \longrightarrow 0 \tag{4.6}$$

zur Folge (dabei setze man $\eta(\lambda) := u$ bzw. v für alle $\lambda \in U$). Beachtet man noch $\mathcal{O}(U, X_1 \oplus X_2) \cong \mathcal{O}(U, X_1) \oplus \mathcal{O}(U, X_2)$, dann erhält man mit $\Lambda^p[\mathcal{O}(U,X)] = \mathcal{O}(U,X)^{\binom{N}{p}}$ unter 'komponentenweiser' Berücksichtigung von (4.6) die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X_1 \cap X_2)] \xrightarrow{u_*} \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X_1)] \oplus \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X_2)] \xrightarrow{v_*} \\ \xrightarrow{v_*} \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X)] \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Daher existieren Folgen $\{\psi_k^{(1)}\}_k \in \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X_1)]$ und $\{\psi_k^{(2)}\}_k \in \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X_2)]$ mit $\psi_k^{(1)} + \psi_k^{(2)} = \psi_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

2.Schritt
Betrachten wir zwei zusätzliche offnen Mengen D_1' und D_2' mit

$$\overline{D} \subset D_2' \subset\subset D_2 \text{ und } \overline{D}_1 \subset D_1' \subset\subset U.$$

Dann ist $(\overline{D_1'} \setminus D_2') \cap S = \emptyset$. Daher können wir bilden

$$Y := X / \mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2'),$$

und nach 4.5 ist $\sigma(T^{(Y)}) \subset \mathbb{C}^N \setminus (\overline{D_1'} \setminus D_2')^\circ = \overline{D_2'} \cup (\mathbb{C}^N \setminus D_1')$.

Damit sind die Voraussetzungen von 3.13 erfüllt und wir erhalten zwei stetige Projektionen p und q auf Y mit

$$\sigma(T^{(Y)}, pY) \subset \overline{D_2'} \quad \text{und} \quad \sigma(T^{(Y)}, qY) \subset \mathbb{C}^N \setminus D_1'.$$

Bezeichnet $[\cdot\cdot]$ die Äquivalenzklassenbildung $X \longrightarrow Y$, so können wir zeigen:

$$x \in X_2 \Rightarrow p[x] = 0. \tag{4.7}$$

Dazu beachten wir zunächst, daß $\sigma(T, X_2) \subset \mathbb{C}^N \setminus D_2$ und $\sigma(T^{(Y)}, pY) \subset \overline{D_2'}$. Da aber $\overline{D_2'} \subset D_2$ ist, findet man offene Mengen V_1, V_2 mit $\sigma(T, X_2) \subset V_1$ und $\sigma(T^{(Y)}, pY) \subset V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Auf $V_1 \cup V_2$ definieren wir eine Funktion h vermöge

$$h(z) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad z \in V_1 \\ 0 & \text{für} \quad z \in V_2. \end{cases}$$

Damit ist $h \in \mathcal{O}(\sigma(T, X_2) \cup \sigma(T^{(Y)}, pY))$ und die Anwendung des analytischen Funktionalkalküls (3.10) liefert

$$h(T|X_2) = \mathrm{id}_{X_2} \quad \text{und} \quad h(T^{(Y)}|pY) = 0.$$

Betrachte die Abbildung $A := p \circ [\cdot\cdot]$. Für $x \in X_2$ und $1 \leq i \leq N$ ist

$$\begin{aligned}(A \circ (T_i|X_2))\, x = A\, T_i x &= p\,[T_i x] \\ &= p\, T_i^{(Y)}(\,[x]\,) \\ &\overset{(*)}{=} T_i^{(Y)}(p\,[x]\,) \\ &= (T_i^{(Y)}|_{pY} \circ A)\, x.\end{aligned}$$

($(*)$ gilt, da pY invariant unter $T^{(Y)}$ ist.) Mit 3.11 können wir folgern

$$A|_{X_2} = A|_{X_2} \circ h(T|X_2) = h(T^{(Y)}|pY) \circ A|_{X_2} = 0,$$

und das ist (4.7).
Analog zeigt man: ist $x \in X_1$, so $q[x] = 0$.

Dies hat zur Folge, daß für $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ gilt:

$$p\,[x] = [x_1] \text{ und } q\,[x] = [x_2]. \tag{4.8}$$

3.Schritt:
Wir müssen nun noch einige Bezeichnungen einführen:
Für eine p-Form $\xi = \sum x_{i_1,\ldots,i_p}\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p} \in \Lambda^p[X]$ setzen wir

$$[\xi] := \sum\, [x_{i_1,\ldots,i_p}]\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p} \in \Lambda^p[Y].$$

Sei V ein Holomorphiegebiet. Die Interpretation von $\omega \in \Lambda^p[\mathcal{O}(V,X)]$ als holomorphe Abbildung auf V mit Werten in $\Lambda^p[X]$ läßt uns dann eine Abbildung

$$[\omega] : V \longrightarrow \Lambda^p[Y], \quad [\omega](z) := [\omega(z)]$$

definieren, und da $[\cdot\cdot]$ stetiger linearer Operator ist, ist $[\omega] \in \mathcal{O}(V, \Lambda^p[Y]) = \Lambda^p[\mathcal{O}(V,Y)]$. Nun ist aber jedes Element in $\Lambda^p[\mathcal{O}(V,Y)]$ als $[\omega]$ wie oben darstellbar, denn die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2') \longrightarrow X \xrightarrow{[\cdot\cdot]} Y \longrightarrow 0$$

hat nach 3.15 die Surjektivität von

$$[\cdot\cdot]_* : \Lambda^p[\mathcal{O}(V,X)] \longrightarrow \Lambda^p[\mathcal{O}(V,Y)] \tag{4.9}$$

zur Folge und man überzeugt sich leicht davon, daß $[\cdot\cdot]_*(\omega) = [\omega]$ ist.
Damit definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned}[\alpha_V] : \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(V,Y)] &\longrightarrow \Lambda^N[\mathcal{O}(V,Y)] \\ ([\alpha_V][\omega])(z) &:= [(\alpha_V \omega)(z)]\end{aligned}$$

Man beachte, daß unter $[\alpha_V]$ der Raum $\Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(V,pY)]$ nach $\Lambda^N[\mathcal{O}(V,pY)]$ abgebildet wird (analog für q).
Schließlich soll für $\omega = \sum f\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p} \in \Lambda^p[\mathcal{O}(V,X)]$ der Ausdruck $p\,[\omega(z)]$ als $\sum p\,[f(z)]\, s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p} \in \Lambda^p[Y]$ verstanden werden.

Die Aussage $\alpha_U \psi_k \to 0$ bedeutet nun, daß für alle relativkompakten Mengen V in U schon

$$\sup_{z \in V} \|\alpha_U \psi_k(z)\| \to 0 \quad \text{ bei } k \to \infty$$

gilt. Nun ist (zur Definition der Norm siehe (3.1))

$$\begin{aligned}\sup_{z\in V}\|\alpha_U\psi_k(z)\| &\geq \sup_{z\in V}\|[\alpha_U\psi_k(z)]\| \quad \text{(Def. Quotiententop.)}\\ &\geq \frac{1}{\|p\|}\sup_{z\in V}\|p\,[\alpha_U\psi_k(z)]\|\\ &\overset{(4.8)}{=} \frac{1}{\|p\|}\sup_{z\in V}\|[\alpha_U\psi_k^{(1)}(z)]\| = \frac{1}{\|p\|}\sup_{z\in V}\|[\alpha_U][\psi_k^{(1)}](z)\|\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck macht Sinn, denn wegen (4.8) ist $[\psi_k^{(1)}(z)] = p\,[\psi_k(z)] \in pY$ für alle $z \in U$, und da p und $[\cdot\cdot]$ stetige Operatoren sind, ist schon $[\psi_k^{(1)}] \in \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, pY)]$. Aus der obigen Ungleichungskette erhalten wir also

$$[\alpha_U][\psi_k^{(1)}] \to 0 \quad \text{in } \Lambda^N[\mathcal{O}(U, pY)]. \tag{4.10}$$

Ein analoges Ergebnis erhält man für $\psi_k^{(2)}$ und q statt p.

4.Schritt
Damit konstruieren wir jetzt $(N-1)$-Formen $\chi_k^{(1)}$ und $\chi_k^{(2)}$, die unter der Abbildung $[\alpha_D]$ dasselbe Bild haben wie $[\psi_k^{(1)}]$ bzw. $[\psi_k^{(2)}]$ und zudem noch $\chi_k^{(i)} \to 0, i = 1, 2$ erfüllen.

Zunächst sei bemerkt, daß $\alpha_D|(\Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X)]|_D)$ und α_U als Abbildungen auf D übereinstimmen, d.h. $(\alpha_D(f|_D))(z) = (\alpha_U(f))(z)$ für $f \in \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X)]$ und $z \in D$ und das liefert unter Berücksichtigung von (4.10) $[\alpha_D][\psi_k^{(i)}] \to 0$.

a) Nun folgt aus der Konstruktion von q, daß $\sigma(T^{(Y)}, qY) \subset \mathbb{C}^N \setminus D_1'$, und da $\overline{D} \subset D_1'$, ist $D \subset \rho(T^{(Y)}, qY)$. Setzt man $S := T^{(Y)}|qY$, dann ist nach der Definition des Taylorspektrums (Def. 3.5) für alle $z \in D$ der Komplex

$$0 \longrightarrow \Lambda^0[qY] \overset{\gamma^0(z-S)}{\longrightarrow} \cdots \overset{\gamma^{N-1}(z-S)}{\longrightarrow} \Lambda^N[qY] \longrightarrow 0$$

exakt.
Offensichtlich hängt der Operator $\gamma^p(z-S)$ analytisch von z ab. Das ruft aber wieder 3.15 auf den Plan und wir erhalten die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(D, \Lambda^0[qY]) \overset{\gamma_*^0(S)}{\longrightarrow} \cdots \overset{\gamma_*^{N-1}(S)}{\longrightarrow} \mathcal{O}(D, \Lambda^N[qY]) \longrightarrow 0$$

(zur Erinnerung: $(\gamma_*^p(S)(f))(z) := \gamma^p(z-S)f(z)$).
Nach 3.20 ist aber $\gamma_*^{N-1}(S) = \alpha_S^{N-1}(D)$, und wegen $(\gamma^p(z-S))([x]) = [\gamma^p(z-T)\,x]$ ist letztere Abbildung schon gleich $[\alpha_D]$. Also haben wir die Surjektivität von

$$[\alpha_D] : \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D, qY)] \longrightarrow \Lambda^N[\mathcal{O}(D, qY)].$$

Da aber $[\alpha_D][\psi_k^{(2)}] \to 0$ (s.o.) existiert nach Korollar 1.19 eine Folge $\{\chi_k^{(2)}\}_k \subset \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D, qY)]$ mit $[\alpha_D][\psi_k^{(2)}] = [\alpha_D]\,\chi_k^{(2)}$ und $\chi_k^{(2)} \to 0$ bei $k \to \infty$.

b) Um eine entsprechende Folge $\{\chi_k^{(1)}\}_k$ zu erhalten, beachten wir, daß $\sigma(T^{(Y)}, pY) \subset \overline{D_2'} \subset U$, und daher hat nach Satz 3.18 die Abbildung

$$[\alpha_U] : \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, pY)] \longrightarrow \Lambda^N[\mathcal{O}(U, pY)]$$

abgeschlossenes Bild (wie in a)). Diese Abbildung ist damit surjektiv auf einen (F)-Raum und wieder sichert das zusammen mit $[\alpha_U][\psi_k^{(1)}] \to 0$ nach Korollar 1.19 die Existenz einer Folge

$\{\chi_k^{(1)}\}_k \subset \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, pY)]$ mit $[\alpha_U]\,\chi_k^{(1)} = [\alpha_U][\psi_k^{(1)}]$ und $\chi_k^{(1)} \to 0$ bei $k \to \infty$.

Wir setzen $\tilde{\chi}_k := \chi_k^{(1)}|_D + \chi_k^{(2)} \in \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D, Y)]$ und haben damit auf D:

$$[\alpha_D][\psi_k] = [\alpha_D]\,\tilde{\chi}_k \quad \text{ und } \quad \tilde{\chi}_k \to 0.$$

Das sieht unserem Ziel schon sehr ähnlich, nur bewegen wir uns noch auf dem Raum Y.

5.Schritt
Um zu X zurückzukommen, betrachten wir noch einmal (4.9) mit $V = D$. Aufgrund der Surjektivität und der Tatsache $\tilde{\chi}_k \to 0$ existiert wieder eine Folge $\{\chi_k\}_k \subset \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D, X)]$ mit

$$[\chi_k] = \tilde{\chi}_k \quad \text{ und } \quad \chi_k \to 0.$$

Wegen der Voraussetzung an $\{\psi_k\}_k$ und $\chi_k \to 0$ haben wir dann

$$\alpha_D\,(\psi_k|_D - \chi_k) \to 0 \quad \text{ bei } k \to \infty. \tag{4.11}$$

(Aus $\alpha_U \psi_k \to 0$ folgt $\alpha_D(\psi_k|_D) \to 0$.) Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
[\alpha_D\,(\psi_k - \chi_k)] = [\alpha_D][\psi_k - \chi_k] &= [\alpha_D]\,([\psi_k] - [\chi_k]) \\
&= [\alpha_D]\,([\psi_k^{(1)}] + [\psi_k^{(2)}]) - [\alpha_D]\,(\chi_k^{(1)} + \chi_k^{(2)}) \\
&= [\alpha_D]\,([\psi_k^{(1)}] - \chi_k^{(1)}) + [\alpha_D]\,([\psi_k^{(2)}] - \chi_k^{(2)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

nach Konstruktion.
Das heißt nun aber $(\alpha_D\,(\psi_k - \chi_k))(z) \in \mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2')$ für alle $z \in D$ und daher

$$\alpha_D\,(\psi_k - \chi_k) \in \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D, \mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2'))]. \tag{4.12}$$

Die $(2, S)$-Zerlegbarkeit von T hat unter anderem zur Folge, daß $\sigma(T, \mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2')) \subset \overline{D_1'} \setminus D_2'$ ist. Da aber $D \cap (\overline{D_1'} \setminus D_2') = \emptyset$, ist nach 3.19 die Abbildung

$$\alpha^{N-1}_{T|\mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2')}(D) : \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D, \mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2'))] \longrightarrow \Lambda^{N}[\mathcal{O}(D, \mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2'))]$$

surjektiv.
Also existiert wegen (4.11) und (4.12) eine Folge $\{\eta_k\}_k \subset \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D, \mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2'))]$ mit

$$\alpha^{N-1}_{T|\mathcal{B}(\overline{D_1'} \setminus D_2')}(D)(\eta_k) = \alpha_D\,(\psi_k - \chi_k) \quad \text{ und } \quad \eta_k \to 0.$$

Wenn wir setzen $\varphi_k := \chi_k + \eta_k \in \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D, X)]$, dann ist

$$\alpha_D\,\varphi_k = \alpha_D\,\psi_k = \alpha_U\,\psi_k \quad \text{ auf } D \text{ und } \varphi_k \to 0.$$

Das beendet den Beweis. ■

4.19 Satz *Es sei $T \in \Delta_N(X)$ ein $(2, S)$-zerlegbares Tupel. Dann hat der Operator*

$$\alpha_T^{N-1} : \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U, X)] \longrightarrow \Lambda^{N}[\mathcal{O}(U, X)]$$

abgeschlossenes Bild für alle Holomorphiegebiete U mit $U \cap S = \emptyset$.

▷**Beweis:** Wir benutzen die Bezeichnungen aus dem vorigen Beweis.

1.Schritt:
Zunächst formulieren wir unser Ziel um. Da α_U stetig ist, ist $\ker \alpha_U$ abgeschlossen. Damit ist

$$Z := \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U,X)]/\ker \alpha_U$$

mit der Quotiententopologie wieder ein (F)-Raum.
Daraus erhält man einen topologischen Monomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \hat{\alpha}_U : Z & \longrightarrow & \Lambda^N[\mathcal{O}(U,X)] \\ \hat{\alpha}_U([\omega]) & := & \alpha_U \omega \end{array}$$

Außerdem ist $\mathrm{Bild}\,\alpha_U = \mathrm{Bild}\,\hat{\alpha}_U$. Bemühen wir an dieser Stelle wieder Lemma 1.10, so können wir sagen:

$\mathrm{Bild}\,\alpha_U$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge* $\{[\psi_k]\}_k$ *in* Z *mit* $\hat{\alpha}_U[\psi_k] \to 0$ *schon* $[\psi_k] \to 0$ *gilt.*

2.Schritt:
Sei $\{\psi_k\}_k \subset \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U,X)]$ mit $\hat{\alpha}_U\,[\psi_k] \to 0$. Die Aussage $[\psi_k] \to 0$ heißt (Erinnerung: die Topologie auf $\mathcal{O}(U,X)$ wird durch das Halbnormensystem $p_V(f) := \sup_{z\in V} \|f(z)\|$, $V \subset\subset U$ gegeben)

$$\inf\{\sup_{z\in V} \|\psi_k(z) + g(z)\|,\ g \in \ker\ \alpha_U\} \to 0$$

für alle relativkompakten Polyzylinder $V \subset U$ (man überzeugt sich schnell davon, daß dies schon gleichbedeutend dazu ist, daß man für V alle relativkompakten Mengen aus U einsetzt).
Sei daher V eine solche Menge und D ein anderer Polyzylinder mit $V \subset\subset D \subset\subset U$.
Nun impliziert $\hat{\alpha}_U\,[\psi_k] = \alpha_U \psi_k \to 0$ nach Satz 4.18 die Existenz einer Folge $\{\varphi_k\}_k \subset \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D,X)]$ mit

$$\alpha_U \psi_k = \alpha_D \psi_k = \alpha_D \varphi_k \text{ auf } D \text{ und } \varphi_k \to 0. \tag{4.13}$$

Wegen $D \cap S = \emptyset$ folgt mit 3.19 die Exaktheit von

$$\Lambda^{N-2}[\mathcal{O}(D,X)] \xrightarrow{\alpha_T^{N-2}} \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(D,X)] \xrightarrow{\alpha_D} \Lambda^N[\mathcal{O}(D,X)]$$

Aus $\alpha_D(\psi_k|_D - \varphi_k) = 0$ folgt dann die Existenz einer Folge $\{\chi_k\}_k \subset \Lambda^{N-2}[\mathcal{O}(D,X)]$ mit $\alpha_T^{N-2}\,\chi_k = \psi_k|_D - \varphi_k$ für alle k.

Wir erinnern an die Möglichkeit, χ_k als holomorphe Abbildung auf D mit Werten in $\Lambda^{N-2}[X]$ anzusehen. Daher können wir die Potenzreihenentwicklung von χ_k betrachten und schreiben

$$\chi_k = \chi_k^{(1)} + \chi_k^{(2)},$$

wobei $\chi_k^{(1)}$ eine Partialsumme der Reihenentwicklung ist und $\chi_k^{(2)}$ das zugehörige Restglied, welches auf allen kompakten Teilmengen von D gleichmäßig gegen 0 konvergiert ([23], Th.1.17 + 1.18).
Die Gleichung $\alpha_T^{N-2}\,\chi_k = \psi_k|_D - \varphi_k$ schreibt sich dann als

$$\psi_k|_D - \alpha_T^{N-2}\,\chi_k^{(1)} = \varphi_k + \alpha_T^{N-2}\,\chi_k^{(2)}.$$

Aber $\chi_k^{(1)}$ ist als Polynom sogar auf U definiert und somit ist schon $\alpha_T^{N-2}\,\chi_k^{(1)} \in \Lambda^{N-1}[\mathcal{O}(U,X)]$.
Aus (4.13) und dem Verhalten von $\chi_k^{(2)}$ folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\varphi_k + \alpha_T^{N-2}\,\chi_k^{(2)}$

gegen 0 auf V und damit die von $\psi_k|_D - \alpha_T^{N-2}\,\chi_k^{(1)}$. Man hat daher

$$\inf\{\sup_{z\in V}\|\psi_k(z)+g(z)\|,\ g\in\ker\,\alpha_U\} \leq \sup_{z\in V}\|\psi_k(z)-\alpha_T^{N-2}\,\chi_k^{(1)}(z)\| \to 0.$$

Da V beliebig war, heißt dies $[\psi_k]\to 0$ in Z. ■

Damit ist auch Satz 4.17 bewiesen. Eine offene Frage hierbei ist aber, ob es, wie im eindimensionalen Fall, möglich ist, die Aussage auch für alle Holomorphiegebiete U mit $S\subset U$ zu beweisen (siehe [2], Lemma 1).

Noch eine kurze Bemerkung zum Begriff Zerlegbarkeit: Für einen einzelnen Operator wurde in der Einleitung schon die Definition der Zerlegbarkeit gegeben. Man kann nun auch bei Tupeln von Operatoren einen Zerlegbarkeitsbegriff analog zu diesem definieren. Im Falle $N=1$ fällt die Definition aus 4.3 mit der aus der Einleitung zusammen (und das rechtfertigt auch die Gleichbenennung). Für $N>1$ sind die Zusammenhänge komplizierter (siehe auch den Beitrag von Eschmeier in [16]).

§5 S-Funktionalkalküle

Wir haben schon im ersten Paragraphen die Klasse der skalaren Operatoren erwähnt. Diese wollen wir nun in dreierlei Hinsicht erweitern. Zunächst werden wir den Definitionsbereich des Funktionalkalküls (dort Spektraldistribution genannt) von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ auf allgemeinere Funktionenalgebren ausdehnen. Zum zweiten werden wir in mehreren Dimensionen arbeiten (also Operatortupel), und schließlich sei wieder eine Ausnahmemenge in noch zu besprechender Weise zugelassen.

Eine die ersten beiden Erweiterungen betreffende Theorie wurde schon von Albrecht in [1] aufgestellt. Der wesentliche Punkt bei den verwendeten Funktionenalgebren ist dabei die Existenz einer Zerlegung der Eins. Die zusätzliche Annahme einer Ausnahmemenge wird sich nur an dieser Stelle wiederspiegeln. Es treten dabei (natürlich beabsichtigte) Ähnlichkeiten mit der Definition der S-Zerlegbarkeit auf.

An dieser Stelle ist der Begriff der $\mathring{S}$-zulässigen Überdeckung einer Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ wichtig. Eine offene Überdeckung $\{G_1, \ldots, G_m\}$ von Ω heißt *$\mathring{S}$-zulässig*, wenn entweder $S \subset G_j$ oder $S \cap G_j = \emptyset$ ist für $1 \le j \le m$ (oder im nichtausschließlichen Sinne). Man beachte den Unterschied zur S-Zulässigkeit einer offenen Überdeckung (4.2); jede S-zulässige Überdeckung ist eine $\mathring{S}$-zulässige.

5.1 Definition *Sei Ω eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{C}^N$ und S eine abgeschlossene Teilmenge von Ω. Eine Algebra $\mathfrak{A}$ von auf Ω definierten komplexwertigen Funktionen heißt S-*normal*, wenn zu jeder offenen $\mathring{S}$-zulässigen Überdeckung $\{G_1, \ldots, G_m\}$ von Ω Funktionen $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{A}$ existieren mit $\operatorname{supp} f_j \subset G_j$ für alle j und $\sum_{j=1}^m f_j \equiv 1$ auf Ω (das heißt insbesondere $1 \in \mathfrak{A}$).*

5.2 Definition *Eine S-normale Algebra $\mathfrak{A}$ heißt S-*zulässig*, wenn $\mathfrak{A}$ die Projektionen π_j auf die Koordinatenebenen enthält und wenn zu jedem $f \in \mathfrak{A}$ und $w \notin \operatorname{supp} f$ Funktionen $g_1, \ldots, g_N \in \mathfrak{A}$ existieren mit*

$$\sum_{j=1}^{N} (w_j - z_j)\, g_j(z) = f(z) \qquad \text{auf } \Omega. \tag{5.1}$$

Hier ein erstes Beispiel für eine S-normale Algebra.

Setze $\Omega = \mathbb{C}^N$ und $S = \mathbb{B}_r := \{z \in \mathbb{C}^N,\ |z|^2 = \sum_{i=1}^N |z_i|^2 \le r^2\}$. Dann ist

$$\mathfrak{A} := \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^N),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{B}_r\}$$

eine S-normale Algebra. Sie ist, wie wir später sehen, sogar S-zulässig.

An diesem Beispiel ist schon gut die Einschränkung für die Existenz von Zerlegungen der Eins zu erkennen, die durch die Forderung der Holomorphie auf $\mathbb{B}_r$ zustande kommt.

5.3 Definition *Sei $\mathfrak{A}$ eine S-zulässige Algebra auf $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, X ein Banachraum. Ein Operatortupel $T = (T_1, \dots, T_N) \in L(X)^N$ heißt* $(\mathfrak{A}, S)$-skalar, *wenn ein unitaler Algebrenhomomorphismus*

$$\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow L(X)$$

existiert mit $\Phi(\pi_j) = T_j$ für alle j (unital heißt $\Phi(1) = id$). Wir nennen Φ auch einen $(\mathfrak{A}, S)$-Funktionalkalkül für T *über Ω.*

Schon in [4] wird für einen Operator gezeigt, daß die Existenz eines Funktionalkalküls die Zerlegbarkeit nach sich zieht. Entsprechendes gilt hier (siehe auch 1.25):

5.4 Satz *Sei $T \in \Delta_N(X)$ ein Tupel mit einem $(\mathfrak{A}, S)-$Funktionalkalkül Φ über Ω. Ist $S \subset \sigma(T)$, dann ist T S-zerlegbar und eine S-spektrale Kapazität wird gegeben durch*

$$\mathcal{B}(F) := \bigcap \{\ker \Phi(f),\ f \in \mathfrak{A} \textit{ und } \operatorname{supp} f \cap F = \emptyset\}. \tag{5.2}$$

▷**Beweis:**

1) Abgeschlossenheit unter T und Invarianz von $\mathcal{B}(F)$ sind einfach nachzurechnen. Ebenso $\mathcal{B}(\emptyset) = \{0\}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{C}^N) = X$.

2) Sei $\{G_1, \dots, G_m\}$ eine S-zulässige Überdeckung von $\mathbb{C}^N$. Da eine solche auch $\mathring{S}$-zulässige Überdeckung von Ω ist, existieren Funktionen $g_1, \dots, g_m \in \mathfrak{A}$ wie in Definition 5.1. Das liefert

$$X = \sum_{i=1}^{m} \Phi(g_i)X \overset{\text{Def. } \mathcal{B}}{\subset} \sum_{i=1}^{m} \mathcal{B}(\operatorname{supp} g_i) \subset \sum_{i=1}^{m} \mathcal{B}(\overline{G}_i).$$

3) Zur Spektralbedingung: Sei $F \in \mathcal{F}_{S,\Omega}$ und $w \notin F$. Dann existiert eine offene Umgebung U von F, die w nicht enthält und die im Falle $F \cap S = \emptyset$ auch mit S leeren Schnitt hat. Dazu findet man noch eine offene Menge V mit $V \cap F = \emptyset$ und $U \cup V = \Omega$. Die S-Normalität von $\mathfrak{A}$ liefert dann eine Funktion $\varphi \in \mathfrak{A}$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ und $\operatorname{supp}(1 - \varphi) \cap F = \emptyset$. Wegen der S-Zulässigkeit von $\mathfrak{A}$ existieren zu $w \notin \operatorname{supp} \varphi$ Funktionen $g_1, \dots, g_N \in \mathfrak{A}$ mit

$$\sum_{i=1}^{N} (w_i - z_i)\, g_i(z) = \varphi(z) \qquad \text{auf } \Omega.$$

Wendet man auf diese Gleichung den Funktionalkalkül Φ an, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{N} (w_i - T_i)\, \Phi(g_i) = \Phi(\varphi).$$

Für $x \in \mathcal{B}(F)$ ist aber nach Definition $\Phi(1 - \varphi)\, x = 0$ und damit $\Phi(\varphi)|_{\mathcal{B}(F)} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}(F)}$. Also

$$\sum_{i=1}^{N} (w_i - T_i|_{\mathcal{B}(F)})\, \Phi(g_i)|_{\mathcal{B}(F)} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}(F)}.$$

Nach 3.6 folgt $w \notin \sigma(T, \mathcal{B}(F))$ (denn T_i vertauscht mit allen $\Phi(f)$).

4) Für die Durchschnittseigenschaft ist noch eine kleine Vorüberlegung erforderlich.
Wir zeigen: *Zu $f \in \mathfrak{A}$ existiert ein $\tilde{f} \in \mathfrak{A}$ mit kompaktem Träger, so daß $\Phi(f) = \Phi(\tilde{f})$.*

Zunächst sei an die Definition des Spektrums eines Operatortupels T bezüglich einer kommutativen Unteralgebra erinnert: Ist $\mathfrak{B}$ eine kommutative Unteralgebra von $L(X)$ mit $T_1, \ldots, T_N \in \mathfrak{B}$, so ist

$$\sigma_{\mathfrak{B}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}^N, \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j - T_j)\, S_j = \text{id hat Lösungen } S_j \text{ in } \mathfrak{B}\}$$

das *Spektrum von T bezüglich* $\mathfrak{B}$. Setzen wir $\mathfrak{B} := (T)''$, die Bikommutantenalgebra von T, dann gilt:

$$\sigma(T, \mathcal{B}(F)) \subset \sigma_{\mathfrak{B}}(T) \tag{5.3}$$

für alle F.

Beweis: Sei $w \notin \sigma_{\mathfrak{B}}(T)$. Dann existieren $S_j \in \mathfrak{B}$ mit $\sum_{j=1}^{N} (\lambda_j - T_j)\, S_j = \text{id}$. Aber $\mathcal{B}(F)$ ist invariant unter den S_j (denn S_j vertauscht mit $\Phi(f)$ da da $\Phi(f) \in (T)'$) und daher ist

$$\sum_{j=1}^{N} (\lambda_j - T_j|_{\mathcal{B}(F)})(S_j|_{\mathcal{B}(F)}) = \text{id}_{\mathcal{B}(F)}$$

und damit $\lambda \notin \sigma(T, \mathcal{B}(F))$ nach Lemma 3.6.

Ist nun $g \in \mathfrak{A}$ mit $\operatorname{supp} g \cap \sigma_{\mathfrak{B}}(T) = \emptyset$, dann ist $\sigma(T, \mathcal{B}(\operatorname{supp} g)) \subset \operatorname{supp} g \cap \sigma_{\mathfrak{B}}(T) = \emptyset$. Also $\mathcal{B}(\operatorname{supp} g) = \{0\}$. Da aber nach Definition von $\mathcal{B}$ schon $\Phi(g)\, X \subset \mathcal{B}(\operatorname{supp} g)$ ist, muß $\Phi(g)$ schon 0 sein.

Für $h \in \mathfrak{A}$ mit kompaktem Träger und $h \equiv 1$ in einer Umgebung V von $\sigma_{\mathfrak{B}}(T)$ (beachte $S \subset \sigma(T) \subset \sigma_{\mathfrak{B}}(T)$ nach (5.3)) ist dann

$$\begin{aligned} \Phi(fh) &= \Phi(f)\, \Phi(h) \\ &= \Phi(f)\, [\Phi\, \underbrace{(h-1)}_{=0 \text{ auf } V} + \Phi(1)] = \Phi(f). \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{f} := fh$ die gewünschte Funktion.

5) Sei $\{F_j\}_j \subset \mathcal{F}_{S,\Omega}$ mit $F := \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{F}_{S,\Omega}$. Die Beziehung $\mathcal{B}(F) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}(F_j)$ ist klar. Ist umgekehrt $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}(F_j)$ und $f \in \mathfrak{A}$ mit $\operatorname{supp} f \cap F = \emptyset$, dann ist zu zeigen, daß $\Phi(f)\, x = 0$.

Wir können wegen 4) ohne Einschränkung f mit kompaktem Träger annehmen. Dann folgt aus $\operatorname{supp} f \subset F^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^c$ schon

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{k=1}^{p} F_{j_k}^c.$$

Definieren wir den *S-Träger* einer Funktion $f \in \mathfrak{A}$ als

$$S\text{-}\operatorname{supp} f := \begin{cases} \operatorname{supp} f & , \text{ falls } \operatorname{supp} f \cap S = \emptyset \\ \operatorname{supp} f \cup S & , \text{ sonst} \end{cases}$$

so ist

$$\{\mathbb{C}^N \setminus F_{j_1}, \ldots, \mathbb{C}^N \setminus F_{j_p}, \mathbb{C}^N \setminus S\text{-}\operatorname{supp} f\}$$

eine $\mathring{S}$-zulässige Überdeckung von $\mathbb{C}^N$. Daher existieren Funktionen $f_0, \ldots, f_p \in \mathfrak{A}$ mit

$$\operatorname{supp} f_0 \cap S\text{-}\operatorname{supp} f = \emptyset \quad \text{ und } \quad \operatorname{supp} f_k \cap F_{j_k} = \emptyset$$

und $\sum_{k=0}^{p} f_k \equiv 1$ auf $\mathbb{C}^N$. Da aber $x \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{B}(F_{j_k})$, folgt $\Phi(f_k)\,x = 0$ für $k \geq 1$. Ebenso ist $\Phi(f f_o)\,x = 0$, da schon $f f_0 = 0$. Insgesamt also

$$\Phi(f)\,x = \sum_{k=0}^{p} \Phi(f)\Phi(f_k)\,x = 0.$$

Somit sind alle Eigenschaften einer spektralen Kapazität auf $\mathcal{F}_{S,\Omega}$ nachgewiesen. ■

Wir werden nun auch eine entsprechende Formulierung des sog. Trägersatzes beweisen. Den Begriff des S-Trägers einer Funktion $f \in \mathfrak{A}$ haben wir im letzten Beweis eingeführt.

5.5 Definition *Sei T ein $(\mathfrak{A}, S)$-skalares Operatortupel mit $(\mathfrak{A}, S)$-Funktionalkalkül Φ über Ω, X ein Banachraum und $x \in X$.*

1. *Der* lokale Träger von Φ bei x, $\operatorname{supp}\Phi(\cdot)\,x$, *ist das Komplement der Vereinigung aller S-zulässigen offenen Mengen $U \subset \Omega$, so daß für alle $f \in \mathfrak{A}$ mit S-$\operatorname{supp} f \subset U$ schon $\Phi(f)\,x = 0$ gilt.*

2. *Der* Träger von Φ, $\operatorname{supp}\Phi$, *ist das Komplement der Vereinigung aller S-zulässigen offenen Mengen $U \subset \Omega$, so daß für alle $f \in \mathfrak{A}$ mit S-$\operatorname{supp} f \subset U$ schon $\Phi(f) = 0$ gilt.*

Die Forderung der S-Zulässigkeit der offenen Mengen in der Definition macht folgende Aussage möglich:

5.6 Lemma *Sei $S \subset \sigma(T)$.*

1. *Ist $f \in \mathfrak{A}$ mit S-$\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\Phi(\cdot)\,x = \emptyset$, so ist $\Phi(f)\,x = 0$.*
2. *Ist $f \in \mathfrak{A}$ mit S-$\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\Phi = \emptyset$, so ist $\Phi(f) = 0$.*

▷**Beweis:** Wie schon im Beweis von Satz 5.4 gezeigt wurde, kann ohne Einschränkung S-$\operatorname{supp} f$ kompakt angenommen werden.

Nach Definition des lokalen Trägers und wegen der Kompaktheit von S-$\operatorname{supp} f$ existieren offene S-zulässige Mengen $U_1, \ldots, U_k$ mit der Eigenschaft der Mengen U aus Definition 5.5, Teil 1 und mit

$$S\text{-}\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j.$$

Dann ist aber $\{U_1, \ldots, U_k, \Omega \setminus S\text{-}\operatorname{supp} f\}$ eine $\mathring{S}$-zulässige Überdeckung von Ω. Also existieren Funktionen $h_0, \ldots, h_k \in \mathfrak{A}$ mit

$$\operatorname{supp} h_0 \subset \Omega \setminus S\text{-}\operatorname{supp} f \quad \text{und} \quad \operatorname{supp} h_j \subset U_j,\ 1 \leq j \leq k \tag{5.4}$$

und $\sum_{j=0}^{k} h_j \equiv 1$ auf Ω. Aber aus (5.4) folgt schon

$$S\text{-}\operatorname{supp} h_0 \subset \Omega \setminus S\text{-}\operatorname{supp} f \quad \text{und} \quad S\text{-}\operatorname{supp} h_j \subset U_j,\ 1 \leq j \leq k.$$

Die Eigenschaften der U_j und die Tatsache, daß $h_0 f \equiv 0$ ist liefert nun

$$\Phi(f)\,x = \sum_{j=0}^{k} \Phi(h_j f)\,x = 0$$

und das ist die Behauptung.
Den zweiten Teil erledigt man analog. ■

Nun der Zusammenhang zwischen (lokalem) Spektrum und Funktionalkalkül.

5.7 Satz *Unter den Voraussetzungen von Definition 5.5 und $S \subset \sigma(T)$ gilt ($\mathcal{F} := \mathcal{F}_{S,\Omega}$)*

1. $\operatorname{supp} \Phi(\cdot)\, x = \sigma_{\mathcal{F},T}(x)$
2. $\operatorname{supp} \Phi = \sigma(T)$.

▷**Beweis:**
ad 1. Nach Satz 5.4 existiert eine S-spektrale Kapazität $\mathcal{B}$ für T. Nach Lemma 4.9 ist $x \in \mathcal{B}(\sigma_{\mathcal{F},T}(x))$. Ist daher $f \in \mathfrak{A}$ mit $S\text{-supp}\, f \cap \sigma_{\mathcal{F},T}(x) = \emptyset$, dann ist $\Phi(f)\, x = 0$ und damit $\operatorname{supp} \Phi(\cdot)\, x \subset \sigma_{\mathcal{F},T}(x)$.
Andererseits ist schon $\mathcal{B}(F) = \bigcap\{\ker \Phi(f),\ S\text{-supp}\, f \cap F = \emptyset\}$ und Lemma 5.6 liefert $x \in \mathcal{B}(\operatorname{supp} \Phi(\cdot)\, x)$. Daher folgt mit Lemma 4.9 (bzw. Korollar 4.14) $\sigma_{\mathcal{F},T}(x) \subset \operatorname{supp} \Phi(\cdot)\, x$.
ad 2. Nach Lemma 4.13 ist $\mathcal{B}(\sigma(T)) = X$. Ist also $f \in \mathfrak{A}$ mit $\operatorname{supp} f \cap \sigma(T) = \emptyset$, dann $\Phi(f)\, x = 0$ für alle $x \in \mathcal{B}(\sigma(T))$, also $\Phi(f) = 0$ und damit $\operatorname{supp} \Phi \subset \sigma(T)$.
Betrachten wir nun die Operatoren

$$\begin{aligned} T_i^R : (T)' &\longrightarrow (T)', \quad T_i^R(S) := S\, T_i \\ T_i^L : (T)' &\longrightarrow (T)', \quad T_i^L(S) := T_i\, S \end{aligned}$$

für $1 \leq i \leq N$ ($(T)'$ ist die Kommutantenalgebra von T), und bilden damit die Tupel

$$T^R := (T_1^R, \ldots, T_N^R) \quad \text{und} \quad T^L := (T_1^L, \ldots, T_N^L).$$

T^R und T^L sind $(\mathfrak{A}, S)$-skalar mit $(\mathfrak{A}, S)$-Kalkül

$$\Phi^R : \mathfrak{A} \longrightarrow L((T)'), \quad \Phi^R(f) := \Phi(f)^R$$

und entsprechend mit L.
Nun ist $\Phi(f) = \Phi^L(f)(\mathrm{id})$ und daher $\operatorname{supp} \Phi = \operatorname{supp} \Phi^L(\cdot)\, \mathrm{id} = \sigma_{\mathcal{F}_S, T^L}(\mathrm{id})$ nach Teil 1.
Wie in [1], Kor.1.4 c gezeigt wird, ist

$$\omega_{T^L}(\mathrm{id}) = \{z \in \mathbb{C}^N,\ \sum_{j=1}^N (z_j - T_j)\, (T)' \neq (T)'\} =: \sigma_{(T)'}(T),$$

$\sigma_{(T)'}(T)$ das sog. *Kommutantenspektrum* von T (zur Definition von $\omega_T(x)$ siehe Abschnitt 4.10). Nun ist aber $\sigma(T) \subset \sigma_{(T)'}(T)$ (siehe etwa [27]) und weiterhin sagt Proposition 4.11 aus, daß $\omega_{T^L}(\mathrm{id}) \subset \sigma_{\mathcal{F}_S, T^L}(\mathrm{id})$ ist. Das heißt nun insgesamt $\sigma(T) \subset \operatorname{supp} \Phi$. ■

Abschließend wollen wir mit Hilfe von Satz 5.4 ein Beispiel eines S-zerlegbaren Operatortupels geben. Dabei wird der Begriff der spektralkonvexen Hülle einer Menge benötigt.

5.8 *Sei K eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}^N$. Die* spektralkonvexe Hülle $\widehat{K}^{\text{spec}}$ *von K ist die Menge aller $w \in \mathbb{C}^N$, für die keine Funktionen $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{O}(K)$ existieren mit der Eigenschaft*

$$\sum_{j=1}^N (w_j - z_j)\, f_j(z) = 1 \quad \textit{auf } K.$$

Die spektralkonvexe Hülle ist immer abgeschlossen und es gilt $K \subset \widehat{K}^{\text{spec}}$. Sinngemäß nennen wir eine abgeschlossene Menge K spektralkonvex, wenn $K = \widehat{K}^{\text{spec}}$. In $\mathbb{C}$ sind alle abgeschlossenen Mengen spektralkonvex.

5.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ eine abgeschlossene beschränkte Menge und $S \subset \Omega$ abgeschlossen und spektralkonvex. Dann ist mit*

$$X := \{f \in \mathcal{C}^1(\Omega),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f \equiv 0 \text{ auf } S, 1 \le j \le N\}$$

das Tupel $T = (T_1, \ldots, T_N)$ mit

$$T_j : X \longrightarrow X, \qquad (T_j f)(z) := z_j\, f(z)$$

ein S-zerlegbares System.

Beweis: Der Raum X ist mit der Norm

$$\|f\| := \sup_{z\in\Omega} |f(z)| + \sum_{i=1}^{2N} \sup_{z\in\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(z) \right|$$

ein Banachraum. Die zugrundeliegende Funktionenalgebra für den Funktionalkalkül sei $\mathfrak{A} = X$. Diese ist S-zulässig. Nichttrivial ist dabei nur (5.1):

i) $\operatorname{supp} f \cap S = \emptyset$. Wir wählen eine Umgebung U von $\operatorname{supp} f$ mit $\{S \cup \{w\}\} \cap U = \emptyset$ und dazu eine Funktion $\psi \in \mathfrak{A}$ mit $\operatorname{supp} \psi \subset U$ und $\operatorname{supp}(1-\psi) \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$.
Ist $w \notin \operatorname{supp} f$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{N} |w_k - z_k|^2 \ne 0 \quad \text{für alle } z \in \operatorname{supp} f.$$

Damit ist

$$g_j(z) := \frac{\overline{w}_j - \overline{z}_j}{\sum_{k=1}^N |w_k - z_k|^2}\, \psi(z) f(z)$$

ein Element von $\mathfrak{A}$ (beachte, daß $\psi \equiv 0$ ist auf S) und es gilt

$$\sum_{j=1}^{N} (w_j - z_j)\, g_j(z) = \psi(z) f(z) \quad \text{auf } \Omega.$$

Da $\psi \equiv 1$ auf $\operatorname{supp} f$, ist die rechte Seite schon gleich $f(z)$ für alle $z \in \Omega$.

ii) $S \subset \operatorname{supp} f$. Sei $w \notin \operatorname{supp} f$. Da dann $w \notin S$, existiert eine Umgebung V von S mit $w \notin V$ und $h_1, \ldots, h_N \in \mathcal{O}(V)$ mit $\sum_{j=1}^N (w_j - z_j)\, h_j(z) = 1$ auf V (denn S ist spektralkonvex). Dann seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}$ mit

$$\operatorname{supp} \varphi_1 \subset V \quad \text{ und } \quad \operatorname{supp} \varphi_2 \subset \Omega \setminus \{S \cup \{w\}\}$$

sowie $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$ auf $\operatorname{supp} f$ ($\{V, \Omega \setminus \{\{w\} \cup S\}\}$ ist eine offene $\mathring{S}$-zulässige Überdeckung von $\operatorname{supp} f$).
Wir setzen für $1 \le j \le N$

$$g_j^{(1)}(z) := h_j(z) \varphi_1(z) f(z) \quad \text{ und}$$

$$g_j^{(2)}(z) := \frac{\overline{w_j} - \overline{z_j}}{\sum_{k=1}^N |w_k - z_k|^2}\, \varphi_2(z) f(z),$$

wobei wir natürlich an den nicht definierten Stellen 0 als Wert setzen. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{N}(w_j - z_j)(g_j^{(1)} + g_j^{(2)})(z) = f(z)$$

auf $\operatorname{supp} f$ und damit auf ganz Ω.

Der (X, S)-Funktionalkalkül für T ist nun gegeben durch

$$\Phi : X \longrightarrow L(X), \qquad \Phi(f)(g) := fg.$$

Wenn wir nun noch $S \subset \sigma(T)$ zeigen können, so ist mit Hilfe von Satz 5.4 der Beweis beendet.

Sei $w \notin \sigma(T)$. Dann ist nach Definition des Spektrums die Abbildung $\gamma^{N-1}(w-T)$ surjektiv. Schreibt man diese Abbildung genau auf, dann heißt dies: es existieren Funktionen $f_1, \ldots, f_N \in X$ mit

$$1 = \sum_{j=1}^{N}(w_j - T_j)\, f_j(z) = \sum_{j=1}^{N}(w_j - z_j)\, f_j(z)$$

auf Ω, was natürlich falsch ist, solange $w \in \Omega$ ist. Also ist schon $S \subset \Omega \subset \sigma(T)$.

Die S-Zulässigkeit der Algebra, die wir vor Definition 5.2 betrachtet haben folgt nun leicht aus der Tatsache, daß die Mengen $\mathbb{B}_r$ spektralkonvex sind.

Nun können wir auch ein Beispiel angeben für ein S-zerlegbares Operatortupel $T = (T_1, \ldots, T_N) \in \Delta_N(X)$, welches S-zerlegbar ist mit $\emptyset \neq S \subsetneq \sigma(T)$ und T ist nicht M-zerlegbar für alle abgeschlossenen echten Teilmengen von S.

In der Situation von 5.9 ist ein solches Beispiel gegeben, wenn wir z.B. $\Omega = \mathbb{B}_{2r}$ und $S = \mathbb{B}_r$ setzen. Dabei verhindert die Voraussetzung der Holomorphie auf S die Existenz von M-spektralen Kapazitäten für abgeschlossene echte Teilmengen von S; bei der Zerlegung der Eins treten zwangsläufig Funktionen auf, die auf offenen Teilmengen von S schon 0 sein müssen, aber nicht identisch 0 sind, was wegen des Identitätssatzes nicht geht.

§6 Die Äquivalenz von S-Zerlegbarkeit und $(2, S)$-Zerlegbarkeit

Per Definition heißt ein Operatortupel S-zerlegbar, wenn es (n, S)-zerlegbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe Definition 4.3). Es stellt sich dann die Frage, ob aus der (n, S)-Zerlegbarkeit von T für bestimmte $n \in \mathbb{N}$ schon umgekehrt die S-Zerlegbarkeit folgt.

Im Falle eines einzelnen Operators hat Radjabalipour in [22] gezeigt, daß Zerlegbarkeit und 2-Zerlegbarkeit schon äquivalent sind. Für Operatortupel zeigten Albrecht und Vasilescu, daß die n-Zerlegbarkeit schon die Zerlegbarkeit impliziert, wenn nur $n \geq \dim \sigma(T) + 1$ ist (dabei ist dim die toplogische Dimension; siehe dazu [31], Kap. IV, Th. 1.22). In [6] konnte Eschmeier dann das Analogon zum eindimensionalen Resultat beweisen.

Indem wir uns auf den Beweis aus [6] stützen, werden wir die Äquivalenz von S-Zerlegbarkeit und $(2, S)$-Zerlegbarkeit erhalten.

Vorbereitungen

Der sehr technische Beweis dieser Äquivalenz macht starken Gebrauch einiger homologischer Resultate, die auch die Lösbarkeit gewisser $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})$-Gleichungen betreffen. Die nachfolgenden Aussagen stammen im wesentlichen aus [13]. Es sei T fortan immer ein Tupel in $\Delta_N(X)$.

6.1 *([13], Lemma 1.1) Seien V_1, V_2 zwei offen Mengen in $\mathbb{C}^N$ mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann existieren zu $f \in \mathcal{C}^\infty(V_1 \cap V_2, X)$ Funktionen $f_i \in \mathcal{C}^\infty(V_i, X)$, $i = 1, 2$, mit $f = f_1 - f_2$ auf $V_1 \cap V_2$.*

6.2 Lemma *Sei G eine offene Menge in $\mathbb{C}^N$, $\psi \in \Lambda^p[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(G, X)]$, V_1, V_2 zwei offene Mengen in G und $\varphi_i \in \Lambda^{p-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_i, X)]$, $i = 1, 2$ mit*

$$\psi = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-1} \varphi_i \quad \text{auf } V_i.$$

Falls gilt

$$H^{p-1}(\mathcal{C}^\infty(V_1 \cap V_2, X), \alpha_T \oplus \bar{\partial}) = 0, \tag{6.1}$$

dann existiert ein $\varphi \in \Lambda^{p-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_1 \cup V_2, X)]$ mit $\psi = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-1} \varphi$ auf $V_1 \cup V_2$.

$\triangleright$**Beweis:** Nur der Fall $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ ist interessant. Da auf $V_1 \cap V_2$ schon $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-1}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ ist, folgt aus (6.1)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-2} \chi \tag{6.2}$$

für ein $\chi \in \Lambda^{p-2}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_1 \cap V_2, X)]$. Zerlege $\chi = \chi_2 - \chi_1$ wie in 6.1. Dann schreibt sich (6.2) als

$$\varphi_1 + (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-2} \chi_1 = \varphi_2 + (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-2} \chi_2.$$

Setzt man $\widetilde{\chi}_i := \varphi_i + (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-2}\chi_i$, dann ist

$$\varphi(z) := \begin{cases} \widetilde{\chi}_1(z) & : \quad z \in V_1 \\ \widetilde{\chi}_2(z) & : \quad z \in V_2 \end{cases}$$

die gewünschte Form. ■

Die Bedingung (6.1) erlaubt es also, lokale Lösungen 'zusammenzukleben'. Durch Induktion zeigt man, daß die Aussage des Lemmas noch richtig ist, wenn man endlich viele offene Mengen $V_1, \ldots, V_m$ in die Voraussetzung aufnimmt und (6.1) paarweise fordert. Damit erhält man sofort

6.3 Korollar *Sei $G \subset \mathbb{C}^N$ offen, $\psi \in \Lambda^p[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(G, X)]$, $K \subset G$ kompakt und für alle Holomorphiegebiete V in G sei $H^p(\mathcal{C}^\infty(V, X), \alpha_T \oplus \bar{\partial}) = H^{p-1}(\mathcal{C}^\infty(V, X), \alpha_T \oplus \bar{\partial}) = 0$. Ist $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^p\psi = 0$, dann existiert eine Umgebung $U \subset G$ von K und eine Form $\varphi \in \Lambda^{p-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U, X)]$ mit $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-1}\varphi = \psi$ auf U.*
Man kann (durch Multiplikation mit einer geeigneten Abschneidefunktion) U, φ dabei sogar so wählen, daß $\varphi \in \Lambda^{p-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(G, X)]$ ist und $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-1}\varphi = \psi$ auf U gilt.

Man hat nur zu beachten, daß der Schnitt zweier Holomorphiegebiete wieder ein solches ist ([17], Cor.2.5.7).

6.4 Wir haben bereits in (3.6) gesehen, daß der Komplex

$$0 \longrightarrow \Lambda^0[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V, X)] \overset{(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^0}{\longrightarrow} \cdots \overset{(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{2N-1}}{\longrightarrow} \Lambda^{2N}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V, X)] \longrightarrow 0 \tag{6.3}$$

exakt ist für alle offenen Mengen V in $\rho(T)$. Damit ist für $x \in X$ die Gleichung

$$sx := x\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\, \psi \tag{6.4}$$

in $\Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(\rho(T), X)]$ immer lösbar, denn es ist ja $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^N(x\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N) = 0$. Diese Lösung kann unter geeigneten Umständen fortgesetzt werden

6.5 Lemma *Hat die Gleichung (6.4) eine Lösung $\widetilde{\psi} \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U, X)]$ für eine offene Menge U, dann hat sie auch eine Lösung $\psi \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(U \cup \rho(T), X)]$.*

▷**Beweis:** Die Exaktheit von (6.3) auf $U \cap \rho(T)$ und die Lösbarkeit von (6.4) auf $\rho(T)$ machen es möglich, Lemma 6.2 anzuwenden. ■

6.6 Wir wollen die Beziehungen zwischen Kohomologiegruppen von Formen über glatten und analytischen Funktionen studieren. Dabei sei auf folgende Tatsache hingewiesen: Da die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Lambda^p[\sigma, Y] \overset{i^*}{\longrightarrow} \Lambda^p[\sigma, X] \overset{\pi^*}{\longrightarrow} \Lambda^p[\sigma, X/Y] \longrightarrow 0$$

für die Einbettung i^* und die kanonische Abbildung π^* exakt ist, hat jede Form mit Koeffizienten in X/Y ein Urbild unter π^*, also einen 'Vertreter' mit Koeffizienten in X.

In [13] hat Frunză gezeigt, daß die Bedingung $H^p(\mathcal{O}(D, X), \alpha_T) = 0$ für $0 \leq p \leq N-1$ für alle Polyzylinder D schon $H^p(\mathcal{C}^\infty(G, X), \alpha_T \oplus \bar{\partial}) = 0$, $0 \leq p \leq N-1$ für alle offenen Mengen $G \subset \mathbb{C}^N$ zur Folge hat. Eine genaue Inspektion des Beweises zeigt, daß dies eine lokale Aussage ist, d.h.

6.7 Lemma *Sei $T \in \Delta_N(X)$ und $G \subset \mathbb{C}^N$ offen, so daß*

$$H^p(\mathcal{O}(V,X), \alpha_T) = 0, \quad 0 \le p \le N-1$$

für alle Holomorphiegebiete $V \subset G$ gilt. Dann ist schon

$$H^p(\mathcal{C}^\infty(G,X), \alpha_T \oplus \bar\partial) = 0, \quad 0 \le p \le N-1.$$

Als Hilfsmittel benutzen wir eine etwas schwächere Aussage

$(*)$ *Sei U ein Holomorphiegebiet. Falls $H^p(\mathcal{O}(U,X), \alpha_T) = 0$ ist für ein $0 \le p \le N-1$, dann ist schon $H^p(\mathcal{C}^\infty(U,X), \alpha_T \oplus \bar\partial) = 0$.*

In [13], Proposition 2.1, hat Frunză diese Aussage für $U =$ Polyzylinder bewiesen. Diese Einschränkung ist aber unnötig; die Exaktheit der natürlichen $\bar\partial$-Sequenz, die Frunză für Polyzylinder ausnutzt, charakterisiert sogar alle Holomorphiegebiete ([17], Cor. 4.2.6) und daher funktioniert der Beweis ohne Schwierigkeiten auch für solche. Im übrigen gilt in $(*)$ auch die Umkehrung.

$\triangleright$**Beweis** von Lemma 6.7: Induktion nach p.
$\underline{p = 0}$:
Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(G,X)$ mit $(\alpha_T \oplus \bar\partial)^0 f = 0$, dann ist einerseits $\bar\partial f = 0$ und damit f holomorph, andererseits ist $\alpha_T f = 0$. Das heißt insbesondere $\alpha_T(f|_V) = 0$ für alle Holomorphiegebiete V in G. Die Voraussetzung liefert dann $f = 0$ auf G.

$\underline{p-1 \rightsquigarrow p}$:
Sei $\psi \in \Lambda^p[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(G,X)]$ mit $(\alpha_T \oplus \bar\partial)^p \psi = 0$. Wir betrachten eine kompakte Ausschöpfung $\{K_\nu\}_\nu$ von G und konstruieren dazu Formen $\phi_\nu \in \Lambda^{p-1}[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(G,X)]$ mit

- $\psi = (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-1}\phi_\nu$ auf einer Umgebung von K_ν und
- $\phi_\nu = \phi_{\nu+1}$ auf einer Umgebung von K_ν.

Dann ist $\phi := \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu$ (punktweise) eine Lösung von $(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-1}\phi = \psi$.

Für K_1 liefert Korollar 6.3 zusammen mit $(*)$ eine Umgebung V_1 und ein $\phi_1 \in \Lambda^{p-1}[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(G,X)]$ mit $(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-1}\phi_1 = \psi$ auf V_1.

Seien $\phi_1, \dots, \phi_l$ schon konstruiert. Wieder nach Korollar 6.3 existiert eine Umgebung V_{l+1} von K_{l+1} und ein $\phi^*_{l+1} \in \Lambda^{p-1}[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(G,X)]$ mit

$$(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-1}\phi^*_{l+1} = \psi \quad \text{ auf } V_{l+1}.$$

Nach Konstruktion ist aber auf einer Umgebung V_l von K_l schon $(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-1}(\phi^*_{l+1} - \phi_l) = 0$. Korollar 6.3 mit $G = V_l$, $K = K_l$ und $\psi = \phi^*_{l+1} - \phi_l$ liefert eine Umgebung $\widetilde{V}_l \subset V_l$ von K_l und ein $\widetilde{\phi}_l \in \Lambda^{p-2}[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(V_l,X)]$ mit

$$(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-2}\widetilde{\phi}_l = \phi^*_{l+1} - \phi_l \quad \text{ auf } \widetilde{V}_l, \tag{6.5}$$

und wieder kann sogar $\widetilde{\phi}_l \in \Lambda^{p-2}[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(G,X)]$ gewählt werden.
Die Form

$$\phi_{l+1} := \phi^*_{l+1} - (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-2}\widetilde{\phi}_l$$

erfüllt die Bedingung

$$(\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-1}\phi_{l+1} = (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-1}\phi^*_{l+1} = \psi \quad \text{ auf } V_{l+1}.$$

Zusätzlich ist auf $\widetilde{V}_l$

$$\begin{aligned}\phi_{l+1} &= \phi^*_{l+1} - (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{p-2}\widetilde{\phi}_l \\ &\overset{(6.5)}{=} \phi^*_{l+1} + \phi_l - \phi^*_{l+1} = \phi_l\end{aligned}$$ ■

Beachten wir die Aussage von Satz 4.17, so liefert 6.7 sofort

6.8 Korollar *Ist T ein $(2,S)$-zerlegbares Tupel, dann gilt für alle offenen Mengen G in $\mathbb{C}^N \setminus S$ schon $H^p(\mathcal{C}^\infty(G,X), \alpha_T \oplus \bar\partial) = 0$, $0 \le p \le N-1$.*

Mit den bisherigen Ergebnissen sind wir nun auch in der Lage, die nach Korollar 4.12 gemachte Bemerkung über die Darstellung S-spektraler Kapazitäten genauer zu formulieren und zu beweisen. Wir setzen

$$X_T(F) := \{x \in X, \text{ es ex. } \psi \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N \setminus F, X)] \text{ mit } sx = (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}\psi\}.$$

Dann erhalten wir

6.9 Satz *Sei T ein $(2,S)$-zerlegbares Tupel. Dann gilt $X_T(F) \subset \mathcal{B}(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}_S$.*

▷**Beweis:** Zunächst der Fall $S \subset F$. Wegen Korollar 6.8 sind die homologischen Bedingungen von Lemma 6.2 erfüllt. Damit gilt

$$X_T(F) = \{x \in X, \, \gamma_T(x) \subset F\},$$

und das zeigt zusammen mit Korollar 4.12 die Behauptung (sogar Gleichheit).

Sei nun $F \cap S = \emptyset$. Wir zeigen: ist G eine offene Menge mit $\overline{G} \cap S = \emptyset$ und $F \subset G$, dann gilt schon $X_T(F) \subset \mathcal{B}(\overline{G})$. Die Durchschnittseigenschaft der spektralen Kapazität (siehe 4.2,2) liefert dann die Behauptung.

Wegen 4.13 können wir $F \subset \sigma(T)$ annehmen. Seien $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_S$ mit $F \subset F_1 \subset G, F \cap F_2 = \emptyset, F_1 \cup F_2 = \mathbb{C}^N$. Dann können wir schreiben $X = \mathcal{B}(F_1) + \mathcal{B}(F_2)$. Ein Element $x \in X_T(F)$ kann dann zerlegt werden in $x = x_1 + x_2$ mit $x_i \in \mathcal{B}(F_i)$. Da $\sigma(T, \mathcal{B}(F_2)) \subset F_2$ sowie $S \subset F_2$, folgt nach 6.4 die Existenz einer $(N-1)$-Form ψ_2 auf $\mathbb{C}^N \setminus F_2$ mit $sx_2 = (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}\psi_2$.
Wir haben daher auf $F^c \cap F_2^c$ (ψ ist die zu x gehörige Form aus der Definition von $X_T(F)$)

$$sx_1 = sx - sx_2 = (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}(\psi - \psi_2). \tag{6.6}$$

Wir wählen eine offene Umgebung V von F, die disjunkt zu F_2 ist und darauf eine skalare $\mathcal{C}^\infty$-Funktion φ mit $\varphi \equiv 0$ in einer Umgebung von F und $\varphi \equiv 1$ außerhalb einer in V gelegenen relativkompakten Umgebung von F. Dann ist $\varphi\psi$ eine Form auf V (man beachte, daß ψ_2 schon auf V definiert ist, da $V \subset F_2^c$). Daher haben wir mit

$$\begin{aligned} h_1 &:= sx_1 - (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}(\varphi\psi - \psi_2) \\ &= sx - (\alpha_T \oplus \bar\partial)^{N-1}(\varphi\psi)\end{aligned}$$

eine Form mit kompaktem Träger in V, die zudem noch in derselben Kohomologieklasse liegt wie sx. Die Definition des Cauchy-Weil-Integrals und der Taylorsche Funktionalkalkül für die Funktion $z \mapsto x$ (siehe 3.9 und 3.10 für die Bezeichnungen) liefern daher

$$x = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_V (-1)^N K(\pi h_1)(z)\, d\lambda^N(z).$$

Wir wollen nun zeigen, daß h_1 so gewählt werden kann (φ ist ja nicht eindeutig), daß die Koeffizientenfunktionen Werte in $\mathcal{B}(F_1)$ haben, da dann das Integral auch in $\mathcal{B}(F_1)$ liegt.

Da die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(F_1 \cap F_2) \xrightarrow{u} \mathcal{B}(F_1) \oplus \mathcal{B}(F_2) \xrightarrow{v} X \longrightarrow 0$$

(mit $u(x) := (x, -x)$ und $v(x,y) := x + y$) exakt ist, folgt (wie im Beweis von Satz 4.18, 1.Schritt) die Existenz zweier Formen χ_1, χ_2 vom Grad $N-1$ auf $F^c \cap F_2^c$ mit Werten in $\mathcal{B}(F_1)$ bzw. $\mathcal{B}(F_2)$ und $\psi - \psi_2 = \chi_1 + \chi_2$. Daher ist nach (6.6) auf $F^c \cap F_2^c$

$$sx_1 - (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\chi_1 = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\chi_2. \tag{6.7}$$

Da auf der linken Seite von (6.7) Formen mit Werten in $\mathcal{B}(F_1)$ stehen und auf der rechten solche mit Werten in $\mathcal{B}(F_2)$, hat $sx_1 - (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\chi_1$ Werte in $\mathcal{B}(F_1 \cap F_2)$. Außerdem liegt diese Form im Kern von $(\alpha_{T|\mathcal{B}(F_1\cap F_2)} \oplus \bar{\partial})^N$. Da

$$\sigma(T, \mathcal{B}(F_1 \cap F_2)) \subset F_1 \cap F_2 \subset (F^c \cap F_2^c)^c,$$

folgt $F^c \cap F_2^c \subset \rho(T, \mathcal{B}(F_1 \cap F_2))$. Das impliziert die Exaktheit der Sequenz

$$(\Lambda^p[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(F^c \cap F_2^c, \mathcal{B}(F_1 \cap F_2))], \alpha_T \oplus \bar{\partial}), \quad 0 \leq p \leq 2N.$$

Also existiert eine $(N-1)$-Form χ auf $F^c \cap F_2^c$ mit Werten in $\mathcal{B}(F_1 \cap F_2)$, so daß $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\chi = sx_1 - (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\chi_1$. Die Form $\chi + \chi_1$ hat Koeffizienten in $\mathcal{B}(F_1)$ und es gilt auf $F^c \cap F_2^c$

$$sx_1 = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}(\chi + \chi_1).$$

Multiplikation mit einer skalaren $\mathcal{C}^\infty$-Funktion g, die identisch Eins ist außerhalb einer relativkompakten Umgebung von F und identisch Null auf einer Umgebung von F, liefert eine Form

$$h_1^* := sx_1 - (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}(g(\chi + \chi_1))$$

auf V mit kompaktem Träger und Koeffizienten in $\mathcal{B}(F_1)$, welche sogar in derselben Kohomologieklasse liegt wie h_1, denn es ist

$$\begin{aligned} h_1 &= sx_1 - (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}(\varphi\psi - \psi_2) \\ &= h_1^* + (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}(g(\chi + \chi_1) - \varphi\psi + \psi_2). \end{aligned}$$

Daher ist schon (vgl. Ende von 3.9)

$$x = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_V (-1)^N K(\pi h_1^*)(z)\, d\lambda^N(z) \in \mathcal{B}(F_1) \subset \mathcal{B}(\overline{G}),$$

und die Behauptung ist bewiesen. ∎

Sei T ein S-zerlegbares Tupel. Hat die Form $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^p \rho$ Werte in einem Spektralraum $\mathcal{B}(D)$, dann trifft dies i.a. nicht auf die Form ρ selbst zu. Man kann aber die Form ρ geeignet durch ein Bild von $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{p-1}$ stören, so daß die Werte im Spektralraum $\mathcal{B}(\overline{W})$ liegen für eine offene Obermenge W von D.

6.10 Lemma *Sei $T \in \Delta_N(X)$ ein $(2,S)$-zerlegbares Tupel mit spektraler Kapazität $\mathcal{B}$. Weiter sei $V \subset \mathbb{C}^N$ offen und W eine offene Umgebung von $D \in \mathcal{F}_S$ mit $\overline{W} \in \mathcal{F}_S$ und $(V \setminus D) \cap S = \emptyset$. Ist $\rho \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V, X)]$ mit*

$$((\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\rho)\,(\lambda) \in \Lambda^N[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{B}(D)]$$

für alle $\lambda \in V$, dann existiert eine Form $\eta \in \Lambda^{N-2}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V, X)]$ mit

$$(\rho - (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-2}\,\eta)\,(\lambda) \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{B}(\overline{W})]$$

für alle $\lambda \in V$.

▷**Beweis:** Wir nehmen $N \geq 3$ an; für $N = 1, 2$ bricht der Beweis an früheren Stellen ab.
i) Setze
$$V_1 := V \setminus D \quad \text{und} \quad V_2 := V \cap W.$$
Da $V_1 \cap \sigma(T, \mathcal{B}(D)) = \emptyset$, folgt mit Beziehung (3.6) die Exaktheit von
$$(\Lambda^p[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_1, \mathcal{B}(D))], \alpha_T \oplus \bar{\partial}),\ 0 \leq p \leq 2N.$$
(Eigentlich $(\alpha_{T|\mathcal{B}(D)} \oplus \bar{\partial})$.) Da die Koeffizienten von $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\rho$ Werte in $\mathcal{B}(D)$ haben und $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\rho$ im Kern von $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^N$ liegen, existiert eine Form $\rho_0 \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_1, \mathcal{B}(D))]$ mit
$$(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\rho_0 = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\rho. \tag{6.8}$$
Nun ist nach Voraussetzung $V_1 \cap S = \emptyset$ und damit folgt nach Satz 4.17 für jedes Holomorphiegebiet H in V_1 das Verschwinden von $H^p(\mathcal{O}(H, \mathcal{B}(D)), \alpha_T)$ für $0 \leq p \leq N-1$. Lemma 6.7 sagt dann $H^p(\mathcal{C}^\infty(V_1, \mathcal{B}(D)), \alpha_T \oplus \bar{\partial}) = 0$ für $0 \leq p \leq N-1$.
Aus (6.8) kann man daher die Existenz einer Form $\eta_1 \in \Lambda^{N-2}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_1, \mathcal{B}(D))]$ folgern mit
$$\rho - \rho_0 = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-2}\eta_1.$$
ii) Wir setzen $\widehat{T} := T^{(X/\mathcal{B}(\overline{W}))}$ (siehe (4.2))
Da $V_2 \cap \sigma(\widehat{T}) = \emptyset$ (nach (4.5)), folgt wieder aus (3.6) die Exaktheit von
$$(\Lambda^p[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_2, X/\mathcal{B}(\overline{W}))], \alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial}), \quad 0 \leq p \leq 2N.$$
Aber $(\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\rho$ hat auf V_2 Koeffizienten mit Werten in $\mathcal{B}(D) \subset \mathcal{B}(\overline{W})$. Daher folgt
$$((\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\rho)/\mathcal{B}(\overline{W}) = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-1}(\rho/\mathcal{B}(\overline{W})) = 0$$
auf V_2, und deshalb existiert eine Form $\eta_2 \in \Lambda^{N-2}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_2, X)]$ mit (beachte 6.6)
$$(\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-2}(\eta_2/\mathcal{B}(\overline{W})) = \rho/\mathcal{B}(\overline{W}).$$
iii) Aus $V_1 \cap V_2 \cap \sigma(\widehat{T}) = \emptyset$ folgt die Exaktheit von
$$(\Lambda^p[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_1 \cap V_2, X/\mathcal{B}(\overline{W}))], \alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial}), \quad 0 \leq p \leq 2N.$$
Daher liefert
$$\begin{aligned}(\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-2}(\eta_1/\mathcal{B}(\overline{W}) - \eta_2/\mathcal{B}(\overline{W})) &= (\rho - \rho_0)/\mathcal{B}(\overline{W}) - \rho/\mathcal{B}(\overline{W}) \\ &= \rho_0/\mathcal{B}(\overline{W}) = 0\end{aligned}$$
die Existenz einer Form $\chi \in \Lambda^{N-3}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_1 \cap V_2, X/\mathcal{B}(\overline{W}))]$ mit
$$\eta_1/\mathcal{B}(\overline{W}) - \eta_2/\mathcal{B}(\overline{W}) = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-3}\chi.$$
Lemma 6.1 macht es möglich, zwei Formen
$$\chi_i \in \Lambda^{N-3}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(V_i, X/\mathcal{B}(\overline{W}))], \quad i = 1, 2$$
zu finden mit $\chi = \chi_2 - \chi_1$ auf $V_1 \cap V_2$.

iv) Definiere damit
$$\widetilde{\eta}(z) := \begin{cases} \eta_1(z)/\mathcal{B}(\overline{W}) + (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-3}\chi_1(z) & \text{für} \quad z \in V_1 \\ \eta_2(z)/\mathcal{B}(\overline{W}) + (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-3}\chi_2(z) & \text{für} \quad z \in V_2 \end{cases}$$

Die Form $\widetilde{\eta}$ erfüllt $(\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-2}\,\widetilde{\eta} = \rho/\mathcal{B}(\overline{W})$ und ist η ein Vertreter von $\widetilde{\eta}$, dann gilt

$$((\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-2}\eta - \rho)(\lambda) \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{B}(\overline{W})]$$

für alle $\lambda \in V_1 \cup V_2 = V$. ■

6.11 Zum Abschluß soll noch ein kommutierendes Diagramm von Kokettenabbildungen gegeben werden, welches ein wesentlicher Bestandteil des Hauptbeweises sein wird. Es taucht erstmals in [28] auf. Zum Aufbau des Diagramms benutzen wir folgende Abkürzungen:

- $B = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^{2N}, X), B_0 = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^{2N}, X)$
- $B_z = \{f \in B, \operatorname{supp} f \subset K \times \mathbb{C}^N$ für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}^N\}$
- $C = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N, X)$, $C_0 = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^N, X)$.

Der Buchstabe F bezeichne Kokettenkomplexe mit zugehörigen Kodifferentialen; z.B. steht $F(B, \alpha_T)$ für den Komplex

$$(\Lambda^p[\sigma, B], \alpha_T), \quad 0 \le p \le N.$$

Wir schreiben die Elemente aus $\mathbb{C}^{2N}$ als Paare (z, w). Da eine Unterscheidung der beiden Komponenten in einigen Fällen wichtig ist, versehen wir an entsprechenden Stellen die Operatoren mit Indices ($\tau := (t_1, \ldots, t_N)$ und $d\bar{w} := (d\bar{w}_1, \ldots, d\bar{w}_N)$ seien weitere Systeme von Unbestimmten):

- α_z := äußere Linksmultiplikation mit $\sum_{j=1}^N \alpha_{T_j}\, s_j$ auf Funktionenräumen über der z-Koordinate,
- α_w := äußere Linksmultiplikation mit $\sum_{j=1}^N \alpha_{T_j}\, t_j$ auf Funktionenräumen über der w-Koordinate,
- $\alpha \oplus \alpha := \alpha_z \oplus \alpha_w$ auf $\Lambda^p[\sigma \cup \tau, \ldots]$,
- $\delta := \bar{\partial}_z \oplus \bar{\partial}_w$:= äußere Linksmultiplikation mit $\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j + \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}\, d\bar{w}_j\right)$ auf $\Lambda^p[d\bar{z} \cup d\bar{w}, \ldots]$.

Wie $\alpha \oplus \alpha \oplus \delta$ zu verstehen ist, sollte dann klar sein.

Das Diagramm hat nun folgende Gestalt:

$$\begin{tikzcd}
F(B,\delta) \arrow[r, "s\wedge t"] \arrow[d, "s"'] & F(B,\alpha\oplus\alpha\oplus\delta) & F(B_z,\alpha\oplus\alpha\oplus\delta) \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & F(B_0,\alpha\oplus\alpha\oplus\delta) \arrow[l, "i_0"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi_0"] & F(B_0,\delta) \\
F(B,\alpha_z\oplus\delta) \arrow[ur, "t"] & F(B_z,\alpha_z\oplus\delta) \arrow[l, "i_1"'] \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[ur, "t"] & F(B_z,\delta) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "(-1)^{N^2}\rho_1"'] & F(B_z,\alpha_w\oplus\delta) \arrow[d, "\rho_1"'] & F(B_0,\alpha_w\oplus\delta) \arrow[l, "i_0"'] \arrow[u, "\pi_0"'] \arrow[d, "\rho_0"] \\
 & & F(C,\bar{\partial}_w) \arrow[r, "t"] & F(C,\alpha\oplus\bar{\partial}_w) & F(C_0,\alpha\oplus\bar{\partial}_w) \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

Zu den einzelnen Abbildungen:

1. Die mit i bezeichneten Abbildungen beschreiben einfach Einbettungen in einen Raum von Formen mit Koeffizienten in einem größeren Funktionenraum.

2. Für eine p-Form ψ in $d\bar{z} \cup d\bar{w}$ über B sei
$$(s \wedge t)\psi := \psi\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \wedge t_1 \wedge \ldots \wedge t_N.$$
Analog operieren s und t.

3. Die Abbildungen π sind Projektionen. Z.B. ist
$$\pi_1 : \Lambda^p[\sigma \cup d\bar{z} \cup d\bar{w}, B_z] \longrightarrow \Lambda^p[d\bar{z} \cup d\bar{w}, B_z]$$
die Abbildung, die alle Summanden der p-Form mit einem s-Anteil vergißt (siehe etwa die Definition des Cauchy-Weil-Integrals in 3.9).

4. Die Abbildungen ρ sind Integrationen. Als Beispiel diene
$$\rho_1 : \Lambda^{p+N}[d\bar{z} \cup d\bar{w}, B_z] \longrightarrow \Lambda^p[d\bar{w}, C]$$
Falls $\omega = f\, d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_r} \wedge d\bar{w}_{i_{r+1}} \wedge \ldots \wedge d\bar{w}_{i_{p+N}}$ mit $i_r < N$, dann sei $\rho_1(\omega) = 0$. Sonst setze
$$\rho_1(f\, d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_N \wedge d\bar{w}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{w}_{i_p}) :=$$
$$\frac{1}{\pi^N}\,(-1)^{(p+1)N} \left(\int_{\mathbb{C}^N} f(z,w)\, d\lambda^N(z) \right) d\bar{w}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{w}_{i_p}$$
Dabei ist das Integral als Funktion von w wieder eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion (beachte den kompakten Träger in der z-Komponente).

Aus diesem Diagramm lassen sich zwei wichtige Beziehungen ableiten (Einzelheiten finden sich in [6]).

1) Sei $x \in X$, $U, W \subset \mathbb{C}^N$ offen. Es sei $\chi_\alpha \in \Lambda^N[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^N, X)]$ mit $\operatorname{supp} \chi_\alpha \subset\subset U$ und
$$\chi_\alpha - x\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \in (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1} \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N, X)]. \tag{6.9}$$
Weiterhin sei $\chi \in \Lambda^{2N}[\sigma \cup \tau \cup d\bar{z} \cup d\bar{w}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^{2N}, X)]$ mit $\operatorname{supp} \chi \subset\subset U \times W$ und
$$\chi - x\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \wedge t_1 \wedge \ldots \wedge t_N \in$$
$$(\alpha \oplus \alpha \oplus \delta)^{2N-1} \Lambda^{2N-1}[\sigma \cup \tau \cup d\bar{z} \cup d\bar{w}, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^{2N}, X)]. \tag{6.10}$$
Dann sieht man mit Diagrammjagd die Existenz einer Form $\rho \in \Lambda^{2N-1}[\sigma \cup \tau \cup d\bar{z} \cup d\bar{w}, \mathcal{C}_z^\infty(\mathbb{C}^{2N}, X)]$ mit
$$t\,\chi_\alpha - \chi = (\alpha \oplus \alpha \oplus \delta)^{2N-1} \rho. \tag{6.11}$$

2) Da alle Abbildungen des Diagramms Kokettenabbildungen sind, induzieren sie entsprechende Abbildungen zwischen den Kohomologiegruppen, künftig mit einem * bezeichnet. Die Wirkung einer *-Abbildung geschieht vertreterweise: etwa $t^*[\psi] := [t\psi]$. Hier bezeichnet $[\cdot\cdot]$ die Kohomologieklasse. Insbesondere sind die Abbildungen i^* Isomorphismen ([28]).

Betrachte jetzt die Form χ_α, die ja Koeffizienten in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^N, X)$ hat, vermöge $(z,w) \mapsto \chi_\alpha(z)$ als Form in $\Lambda^N[\sigma \cup d\bar{z} \cup d\bar{w}, \mathcal{C}_z^\infty(\mathbb{C}^{2N}, X)]$, die in den Unbestimmten $d\bar{w}$ vom Grad 0 ist. Ist $f \in \mathcal{O}(U)$, so kann vermittels $(z,w) \mapsto f(z)$ auch f als $\mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{C}^N)$-Abbildung aufgefaßt werden. Da $\operatorname{supp} \chi_\alpha \subset U \times \mathbb{C}^N$, hat $f\chi_\alpha$ glatte Koeffizienten. Dann kann man definieren
$$x_f := \rho_1^* \circ \pi_1^*\,[f\chi_\alpha] \in H^0(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N, X), \bar{\partial}_w) = \ker \bar{\partial}_w,$$

da kein w-Anteil in $f\chi_\alpha$ vorhanden ist. Daher ist auch x_f konstant und somit ein Element in X.

Betrachte speziell den Fall $f \equiv 1$ auf U. Dann ist $f\chi_\alpha = \chi_\alpha$. Wegen (6.9) haben sx und χ_α die gleiche Kohomologieklasse bezüglich $\alpha_T \oplus \bar{\partial}$. Zudem hat χ_α als Funktion von z kompakten Träger in U. Daher ist ($p = 0$)

$$\rho_1 \circ \pi_1(\chi_\alpha) = \left(-\frac{1}{\pi}\right)^N \int_U K(\pi_1(sx))(z)\, d\lambda^N(z),$$

wobei K wieder die Koeffizientenfunktion der Form bezeichnet. Da aber $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N, X) = H^0(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N, X), \bar{\partial}_w)$, ist

$$\rho_1^* \circ \pi_1^*[\chi_\alpha] = [\rho_1 \circ \pi_1\,(\chi_\alpha)]$$

und die Definition des Cauchy-Weil-Integrals und die Eigenschaften des analytischen Funktionalkalküls (Satz 3.10) zeigen, daß

$$x_{f\equiv 1} = x \tag{6.12}$$

ist.

Falls nun $(i_0^*)^{-1} \circ t^*\,[f\chi_\alpha] = [f\,\chi]$ ($\Leftrightarrow t^*[f\chi_\alpha] = i_0^*[f\chi] = [f\chi]$) ist, dann liefert Diagrammjagd ein $\varphi \in \Lambda^{N-1}[\tau \cup d\bar{w}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N, X)]$ mit

$$t\,x_f = (\alpha \oplus \bar{\partial}_w)^{N-1}\varphi \tag{6.13}$$

außerhalb supp $(\rho_0 \circ \pi_0(f\chi))$.

Nun haben wir das Rüstzeug für den Beweis unseres Haupsatzes zusammen.

Der Hauptsatz

Der Schritt von $(2, S)$-Zerlegbarkeit zu S-Zerlegbarkeit hängt wesentlich an folgender Aussage:

6.12 Satz *Sei $T \in \Delta_N(X)$ ein $(2, S)$-zerlegbares Tupel mit Kapazität $\mathcal{B}$, sei F eine kompakte Menge mit $S \subset F$. Ist $\{H_1, H_2\}$ eine offene S-zulässige Überdeckung von F, dann gilt $\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{B}(\overline{H}_1) + \mathcal{B}(\overline{H}_2)$.*

Bevor wir zum Beweis kommen, soll das eigentliche Resultat als Korollar präsentiert werden.

6.13 Korollar *Jedes $(2, S)$-zerlegbare System kommutierender Operatoren ist schon S-zerlegbar.*

$\triangleright$**Beweis:** Wir zeigen per Induktion: *für alle $n \geq 1$ und jede offene S-zulässige Überdeckung $F \subset H_1 \cup \ldots \cup H_n$ einer kompakten Menge $F \supset S$ gilt $\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{B}(\overline{H}_1) + \cdots + \mathcal{B}(\overline{H}_n)$.*
Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei die Behauptung für ein $n \geq 1$ bewiesen und sei $F \subset H_1 \cup \ldots \cup H_{n+1}$ eine offene S-zulässige Überdeckung von F. Wir wählen offene Mengen $V_1, \ldots, V_{n+1}$ mit kompaktem Abschluß und $\overline{V}_i \subset H_i$, so daß $F \subset V_1 \cup \ldots \cup V_{n+1}$ eine S-zulässige Überdeckung von F ist. Die Numerierung sei dabei so gewählt, daß $S \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Wegen Satz 6.12 und der Induktionsbehauptung ist

$$\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{B}(\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_n) + \mathcal{B}(\overline{V}_{n+1}) \subset \mathcal{B}(\overline{H}_1) + \cdots + \mathcal{B}(\overline{H}_n) + \mathcal{B}(\overline{H}_{n+1}).$$

Der Fall $F = \sigma(T)$ zeigt, daß $\mathcal{B}$ eine n-spektrale Kapazität auf $\mathcal{F}_S$ ist. ∎

▷**Beweis** von Satz 6.12:
Wir wollen $x \in \mathcal{B}(F)$ in Summanden aus $\mathcal{B}(\overline{H}_1)$ und $\mathcal{B}(\overline{H}_2)$ zerlegen.

Da $\{H_1, H_2\}$ eine S-zulässige Überdeckung von F ist, gelingt es, zwei offene Mengen G_1, G_2 zu finden mit $\overline{G}_i \subset H_i$, $F \subset G_1 \cup G_2$ und $(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2) \cap S = \emptyset$ (man mache sich dies an einer Zeichnung klar).
Wir können dann $Y := \mathcal{B}(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2)$ definieren und schreiben $\widehat{R}$ für $R^{(X/Y)}$ für ein $R \in L(X)^N$. Desweiteren sei G eine offene Menge mit $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 \subset G$, $\overline{G} \cap S = \emptyset$ und $\overline{G} \subset H_1 \cap H_2$.

1.Schritt Wir setzen $K_1 := F \setminus G_2$ und $K_2 := F \setminus G_1$ sowie K die disjunkte Vereinigung $K_1 \cup K_2 = F \cap (\mathbb{C}^N \setminus (G_1 \cap G_2))$.

Da $\sigma(T, \mathcal{B}(F)) \subset F$, existiert auf $\mathbb{C}^N \setminus F$ eine Lösung $\widetilde{\psi}_\alpha \in \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N \setminus F, \mathcal{B}(F))]$ von
$$x\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N = (\alpha_T \oplus \bar{\partial})^{N-1}\, \widetilde{\psi}_\alpha,$$
(siehe 6.4), was nach Rechnung modulo Y
$$(x/Y)\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-1}\, (\widetilde{\psi}_\alpha / Y)$$
zur Folge hat. Da nach 4.5 schon $G_1 \cap G_2 \subset \rho(\widehat{T})$ ist, finden wir mit Hilfe von Lemma 6.5 eine Lösung ψ_α von
$$(x/Y)\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial})^{N-1}\, (\psi_\alpha / Y)$$
in $\Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty((\mathbb{C}^N \setminus F) \cup (G_1 \cap G_2), X)] = \Lambda^{N-1}[\sigma \cup d\bar{z}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N \setminus K, X)]$.

2. Schritt Betrachte die Abbildung $f := (f_1, \ldots, f_{2N})$ mit
$$f_j(z) = f_{j+N}(z) = z_j, \quad 1 \le j \le N.$$
Dann ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)^{2N}$. Da T $(2, S)$-zerlegbar ist, folgt nach Satz 4.15 die $(2, \overline{f(S)})$-Zerlegbarkeit von $f(T) = (T_1, \ldots, T_N, T_1, \ldots, T_N)$. Es ist
$$\overline{f(S)} = \overline{\{(z,z), z \in S\}} = \{(z,z), z \in S\} =: \mathrm{diag}(S).$$
Eine spektrale Kapazität für $f(T)$ auf $\mathcal{F}_{\mathrm{diag}(S)}$ ist gegeben durch $\mathcal{B}^*(M) := \mathcal{B}(f^{-1}(M) \cap \sigma(T))$. Insbesondere ist daher $\mathcal{B}(F) \overset{4.13}{=} \mathcal{B}(F \cap \sigma(T)) = \mathcal{B}^*(\mathrm{diag}(F))$, und da $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) = \mathrm{diag}(\sigma(T))$ ist, folgt
$$\mathcal{B}^*(\mathrm{diag}(F)) = \mathcal{B}^*(\mathrm{diag}(F) \cap \sigma(f(T))) = \mathcal{B}^*((F \times F) \cap \sigma(f(T))) = \mathcal{B}^*(F \times F).$$
Da $x \in \mathcal{B}(F)$ und $\sigma(f(T), \mathcal{B}^*(\mathrm{diag}(F))) \subset \mathrm{diag}(F)$ ist, existiert eine Lösung $\widetilde{\psi}$ von
$$x\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \wedge t_1 \wedge \ldots \wedge t_N = (\alpha_{f(T)} \oplus \bar{\partial})^{2N-1}\, \widetilde{\psi} = (\alpha_T \oplus \alpha_T \oplus \delta)^{2N-1}\, \widetilde{\psi}$$
(die Operatoren $\alpha_{f(T)}$ und $\bar{\partial}$ wirken hier bezüglich des Systems $\{\sigma \cup \tau, d\bar{z} \cup d\bar{w}\}$) auf $\mathbb{C}^{2N} \setminus \mathrm{diag}(F)$ und daher wieder
$$(x/Y)\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \wedge t_1 \wedge \ldots \wedge t_N = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \alpha_{\widehat{T}} \oplus \delta)^{2N-1}\, (\widetilde{\psi}/Y).$$
Weiterhin ist wegen $Y = \mathcal{B}^*((\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2) \times (\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2))$ schon
$$\sigma(f(\widehat{T})) \overset{3.11}{=} \sigma(\widehat{f(T)}) \subset \mathbb{C}^{2N} \setminus ((G_1 \cap G_2) \times (G_1 \cap G_2))$$
(siehe wieder 4.5) und damit liefert Lemma 6.5 eine Lösung ψ von
$$(x/Y)\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \wedge t_1 \wedge \ldots \wedge t_N = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \alpha_{\widehat{T}} \oplus \delta)^{2N-1}\, (\psi/Y)$$

auf $(\mathbb{C}^{2N} \setminus \operatorname{diag}(F)) \cup ((\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2) \times (\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2)) = \mathbb{C}^{2N} \setminus \operatorname{diag}(K)$.

3.Schritt Wir wählen disjunkte offene Umgebungen U_i von K_i mit $U_i \subset H_i$, $U := U_1 \cup U_2$.
Da $S \subset K_1 \cup K_2$, folgt $S \subset U$. Nach Konstruktion im 1. Schritt haben wir

$$0 = (x/Y)\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N - (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar\partial)^{N-1}(\psi_\alpha/Y) \quad \text{auf } \mathbb{C}^N \setminus K.$$

Sei θ_α eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, die identisch Eins ist auf einer Umgebung von U^c und identisch Null auf K. Dann ist

$$(\chi_\alpha/Y) := (x/Y)\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N - (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar\partial)^{N-1}(\theta_\alpha\psi_\alpha/Y)$$

eine Form in $\Lambda^N[\sigma \cup d\bar z, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N, X/Y)]$ mit $\operatorname{supp}(\chi_\alpha/Y) \subset\subset U$.

Analog wählen wir eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion θ mit $\theta \equiv 1$ in einer Umgebung von $((U_1 \times U_1) \cup (U_2 \times U_2))^c$ und $\theta \equiv 0$ auf $\operatorname{diag}(K)$. Dann ist

$$(\chi/Y) := (x/Y)\, s_1 \wedge \ldots \wedge s_N \wedge t_1 \wedge \ldots \wedge t_N - (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \alpha_{\widehat{T}} \oplus \delta)^{2N-1}\, (\theta\psi/Y)$$

eine Form in $\Lambda^{2N}[\sigma \cup \tau \cup d\bar z \cup d\bar w, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^{2N}, X/Y)]$ mit $\operatorname{supp}(\chi/Y) \subset\subset (U_1 \times U_1) \cup (U_2 \times U_2) \subset U \times U$. Nun sind wir aber in der Situation von (6.9) und (6.10) und erhalten mit (6.11) eine $2N-1$-Form ρ auf $\mathbb{C}^{2N}$ mit

$$t\,(\chi_\alpha/Y) - (\chi/Y) = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \alpha_{\widehat{T}} \oplus \delta)^{2N-1}(\rho/Y). \tag{6.14}$$

(man fasse hier wieder χ_α als Form mit Koeffizienten in $\mathbb{C}^{2N}$ auf.) Da $Y \subset \mathcal{B}(\overline{G})$ ist, kann aus Gleichung (6.14) gefolgert werden

$$t\,(\chi_\alpha/\mathcal{B}(\overline{G})) - (\chi/\mathcal{B}(\overline{G})) = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \alpha_{\widehat{T}} \oplus \delta)^{2N-1}(\rho/\mathcal{B}(\overline{G})). \tag{6.15}$$

Nun würden wir gerne diese Gleichung mit der Funktion

$$f(z,w) := \begin{cases} 1 & : \quad (z,w) \in U_1 \times \mathbb{C}^N \\ 0 & : \quad (z,w) \in U_2 \times \mathbb{C}^N \end{cases}$$

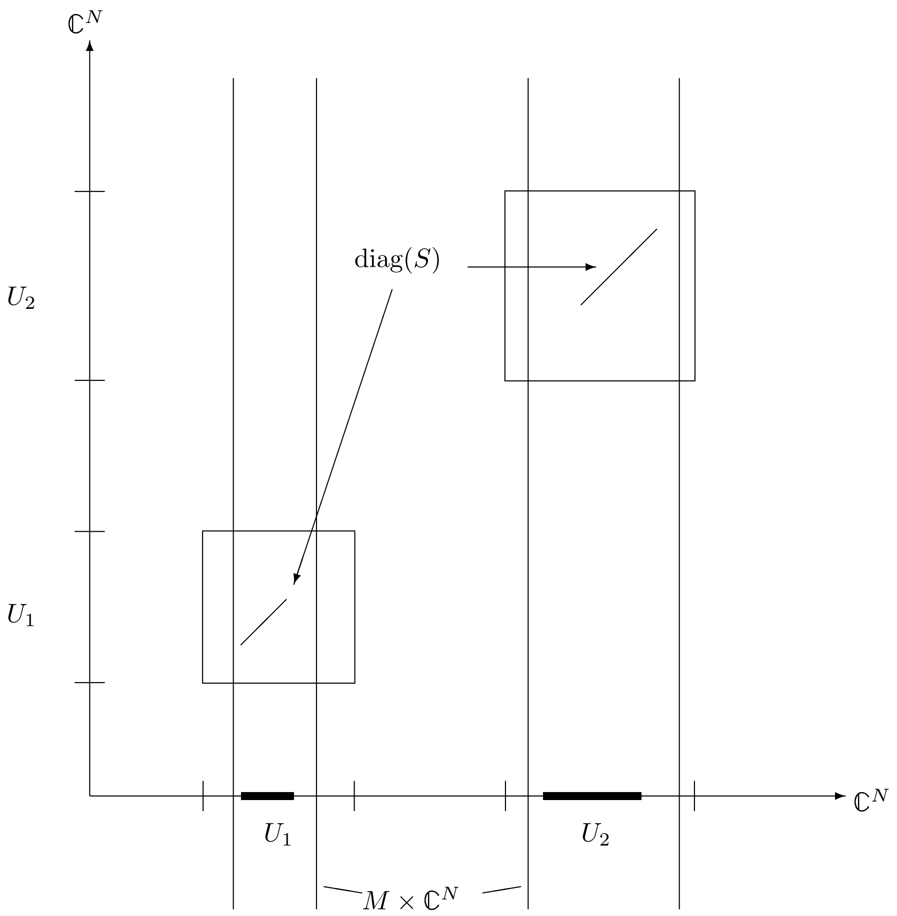
durchmultiplizieren, aber $f(\rho/\mathcal{B}(\overline{G}))$ hat keine glatten Koeffizienten mehr. Dieses Problem ließe sich lösen, wenn wir eine Form ρ' finden könnten, so daß $\rho'/\mathcal{B}(\overline{G})$ Träger in $U \times \mathbb{C}^N$ hat. Das gelingt uns mit Lemma 6.10. Die Konstruktion zeigt, daß $t\,(\chi_\alpha/Y) - (\chi/Y) \equiv 0$ ist außerhalb von $M \times \mathbb{C}^N$, wo M eine kompakte Teilmenge von U ist, die noch so groß gewählt werden kann, daß $S \subset M$ (siehe Bild; die dicken Linien bezeichnen die Vereinigung von $\operatorname{supp}\chi_\alpha$ und der Projektion von $\operatorname{supp}\chi$ auf die z-Koordinate).

Also ist außerhalb von $M \times \mathbb{C}^N$ wegen (6.14) schon

$$(\alpha_T \oplus \alpha_T \oplus \delta)^{2N-1}\,\rho \in Y.$$

Wir setzen daher in Lemma 6.10

- $V = \mathbb{C}^{2N} \setminus (M \times \mathbb{C}^N)$
- $D = \operatorname{diag}(\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2)$ (denn $Y = \mathcal{B}^*(D)$)
- $W = G \times G$.



Außerdem übernimmt diag(S) die Rolle von S. Dann ist $V \cap$ diag$(S) = \emptyset$.

Lemma 6.10 liefert nun eine Form $\eta \in \Lambda^{2N-2}[\sigma \cup \tau \cup d\bar{z} \cup d\bar{w}, \mathcal{C}^\infty(V, X)]$, so daß

$$\rho' := \rho - (\alpha_T \oplus \alpha_T \oplus \delta)^{2N-2}\, \eta$$

Werte in $\mathcal{B}^*(\overline{G} \times \overline{G}) = \mathcal{B}(\overline{G} \cap \sigma(T)) = \mathcal{B}(\overline{G})$ hat auf V.
Da man η mit einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion multiplizieren kann, die in einer Umgebung von $M \times \mathbb{C}^N$ verschwindet und auf einer Umgebung von $\mathbb{C}^{2N} \setminus (U \times \mathbb{C}^N)$ identisch Eins ist, kann η als Form auf $\mathbb{C}^{2N}$ betrachtet werden und $\rho'/\mathcal{B}(\overline{G})$ ist noch Null auf einer Umgebung von $\mathbb{C}^{2N} \setminus (U \times \mathbb{C}^N)$. Ersetzen wir ρ in Gleichung (6.15), dann sehen wir, daß die rechte Seite jetzt gefahrlos mit der Funktion f multipliziert werden kann, ohne die $\mathcal{C}^\infty$-Eigenschaften der Koeffizienten zu zerstören. Rechnet man modulo dem Bild der Abbildung $(\alpha_{\widehat{T}} \oplus \alpha_{\widehat{T}} \oplus \delta)^{2N-1}$ (was durch $[\cdot\cdot]$ angezeigt wird), so folgt

$$[t\,((f\chi_\alpha)/\mathcal{B}(\overline{G}))] - [(f\chi)/\mathcal{B}(\overline{G})] = 0. \tag{6.16}$$

Das bringt uns aber in die Situation von (6.13) (hier mit Formen, deren Koeffizienten in $X/\mathcal{B}(\overline{G})$ liegen) und wir erhalten eine Form φ auf $\mathbb{C}^N$ mit

$$t \circ \rho_1 \circ \pi_1((f\chi_\alpha)/\mathcal{B}(\overline{G})) = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial}_w)^{N-1}(\varphi/\mathcal{B}(\overline{G})) \tag{6.17}$$

außerhalb von supp $(\rho_0 \circ \pi_0((f\chi)/\mathcal{B}(\overline{G})))$. Man beachte schon jetzt, daß supp $(\rho_0 \circ \pi_0((f\chi)/\mathcal{B}(\overline{G})) \subset\subset U_1 \subset H_1$.

Setzt man in (6.16) statt f die Funktion $1-f$ ein, so erhält man analog zu (6.17) ein φ' mit

$$t \circ \rho_1 \circ \pi_1(((1-f)\chi_\alpha)/\mathcal{B}(\overline{G})) = (\alpha_{\widehat{T}} \oplus \bar{\partial}_w)^{N-1}(\varphi'/\mathcal{B}(\overline{G}))$$

außerhalb von supp $(\rho_0 \circ \pi_0(((1-f)\chi)/\mathcal{B}(\overline{G})) \subset\subset U_2 \subset H_2$. Wähle $x_1, x_2 \in X$ mit

$$x_1/\mathcal{B}(\overline{G}) = \rho_1 \circ \pi_1((f\chi_\alpha)/\mathcal{B}(\overline{G})) \quad \text{und} \quad x_2/\mathcal{B}(\overline{G}) = \rho_1 \circ \pi_1(((1-f)\chi_\alpha)/\mathcal{B}(\overline{G})).$$

Dann ist wegen $x_{f\equiv 1} = x$ (siehe (6.12)) schon $x_1/\mathcal{B}(\overline{G}) + x_2/\mathcal{B}(\overline{G}) = x/\mathcal{B}(\overline{G})$, und das heißt

$$x - (x_1 + x_2) \in \mathcal{B}(\overline{G}). \tag{6.18}$$

Nun ist aber $\sigma(T, \mathcal{B}(\overline{G})) \subset \overline{G} \subset H_1 \cap H_2$, und da $t\,x_1 - (\alpha_T \oplus \bar{\partial}_w)^{N-1}\varphi \in \mathcal{B}(\overline{G})$ außerhalb von supp $(\rho_0 \circ \pi_0((f\chi)/\mathcal{B}(\overline{G})))$ (wegen (6.17)), folgt sofort die Lösbarkeit von

$$t\,x_1 - (\alpha_T \oplus \bar{\partial}_w)^{N-1}\varphi = (\alpha_T \oplus \bar{\partial}_w)^{N-1}\varphi_1$$

außerhalb der kompakten Teilmenge supp $\{\rho_0 \circ \pi_0((f\chi)/\mathcal{B}(\overline{G}))\} \cup \overline{G}$ von H_1 . Entsprechend hat

$$t\,x_2 - (\alpha_T \oplus \bar{\partial}_w)^{N-1}\varphi' = (\alpha_T \oplus \bar{\partial}_w)^{N-1}\varphi_2$$

eine Lösung außerhalb einer kompakten Teilmenge von H_2. Das heißt nun aber nach Satz 6.9, daß $x_1 \in \mathcal{B}(\overline{H}_1)$ und $x_2 \in \mathcal{B}(\overline{H}_2)$. Also schließen wir

$$x = (x - (x_1 + x_2)) + x_1 + x_2 \in \mathcal{B}(\overline{G}) + \mathcal{B}(\overline{H}_1) + \mathcal{B}(\overline{H}_2) \subset \mathcal{B}(\overline{H}_1) + \mathcal{B}(\overline{H}_2)$$

und das ist die gewünschte Zerlegung. ■

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Albrecht, E.: Funktionalkalküle in mehreren Veränderlichen für stetige lineare Operatoren auf Banachräumen. *Manuscripta Math.*, 14 (1974), S.1-40

[2] Albrecht, E. und Eschmeier, J.: Analytic functional models and local spectral theory. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 75 (1997), S.323-348

[3] Bishop, E.: A duality theorem for an arbitrary operator. *Pacific J. Math.*, 9 (1959), S.379-394

[4] Colojoară, I. und Foiaş, C.: *Theory of generalized spectral operators.* Gordon and Breach, New York, 1968

[5] Eschmeier, J.: On two notions of local spectrum for several commuting operators. *Michigan Math. J.*, 30 (1983), S.245-248

[6] Eschmeier, J.: Equivalence of decomposability and 2-decomposability for several commuting operators. *Math. Ann.*, 262 (1983), S.305-312

[7] Eschmeier, J. und Putinar, M.: Bishop's condition (β) and rich extensions of linear operators. *Indiana Univ. Math. J.*, 37, S.325-348

[8] Eschmeier, J. und Putinar, M.: *Spectral decomposition and analytic sheaves.* Clarendon Press, Oxford, 1996

[9] Fischer, W. und Lieb, I.: *Funktionentheorie.* Vieweg, Braunschweig, 1994

[10] Floret, K. und Wloka, J.: *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume.* Lec. Notes Math. Vol. 56, Springer-Verlag, Berlin, 1968

[11] Foiaş, C.: Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach spaces. *Arch. Math.*, 14 (1963), S.341-349

[12] Frunză, S.: A characterization for the spectral capacity of a finite system of operators. *Czech. Math. J.*, 27 (1977), S.356-362

[13] Frunză, S.: The Taylor spectrum and spectral decompositions. *J. Functional Analysis*, 6 (1975), S.390-421

[14] Frunză, S.: An axiomatic theory of spectral decompositions of systems of operators I. *St. cerc. math.*, 27 (1975), S.655-711

[15] Grothendieck, A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Memoires of the AMS, Nr. 16, 1966

[16] Helson, H. u.a. (ed): *Spectral theory of linear operators and related topics.* Operator theory: Advances and applications, vol. 14, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1984

[17] Hörmander, L.: *An introduction to complex analysis in several variables.* Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1966

[18] Krantz, S.G.: *Function theory of several complex variables.* John Wiley & Sons, New York, 1982

[19] Lang, S.: *Algebra.* Third edition, Addison Wesley, New York, 1993

[20] Martin, M. und Putinar, M.: *Lectures on hyponormal operators.* Operator Theory, vol. 39, Birkhäuser, Basel, 1989

[21] Meise, R. und Vogt, D.: *Einführung in die Funktionalanalysis.* Vieweg, Braunschweig, 1992

[22] Radjabalipour, M.: Equivalence of decomposable and 2-decomposable operators. *Pac. Math. J.*, 77 (1978), S.243-247

[23] Range, M.: *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* Springer-Verlag, Berlin, 1986

[24] Rudin, W.: *Functional analysis.* McGraw-Hill, New York, 1973

[25] Schaefer, H.: *Topological vector spaces.* The Macmillan Company, New York, 1966

[26] Shields, A.L.: Weighted shift operators and analytic function theory. *Topics in operator theory*, Math. Surveys vol.13, AMS, Providence, Rhode Island, 1974

[27] Taylor, J.: A joint spectrum for several commuting operators. *J. Functional Analysis*, 6 (1970), S.172-191

[28] Taylor, J.: The analytic functional calculus for several commuting operators. *Acta Math.*, 125 (1970), S.1-38

[29] Trèves, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, New York, 1967

[30] Triebel, H.: *Höhere Analysis.* VEB, Berlin, 1972

[31] Vasilescu, F.-H.: *Analytic functional calculus and spectral decompositions.* Reidel, Dordrecht, 1982

[32] Werner, D.: *Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, 1995

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den