

Kompaktheit in topologischen Räumen

4.1. DEFINITION. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

- (a) Eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ (I eine beliebige Indexmenge) von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* von A , falls $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Eine solche Überdeckung $(G_i)_{i \in I}$ von A heißt
- *endlich*, falls $|I| < \infty$ und
 - *offen*, falls alle G_i offen in (X, τ) sind ($i \in I$).
- Ist $(G_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X und ist $J \subseteq I$, so daß noch $A \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$ gilt, so heißt $(G_j)_{j \in J}$ eine *Teilüberdeckung* von $(G_i)_{i \in I}$.
- (b) A heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- (c) (X, τ) heißt *kompakt*, falls X kompakt (bzgl. τ) ist.

4.2. BEMERKUNG. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (a) Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.
- (b) $A \subseteq X$ ist kompakt genau dann, wenn A mit der von τ induzierten Topologie τ_A ein kompakter topologischer Raum ist.
- (c) Ist A eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge $K \subseteq X$, so ist auch A kompakt.
- (d) Ist $A \subseteq B \subseteq X$ und $\overline{B}$ kompakt, so ist auch $\overline{A}$ kompakt.

BEWEIS. (a) sieht man durch Nachrechnen.

(b) Man beachte $G \subseteq A$ ist genau dann offen bzgl. τ_A , wenn es eine offene Menge G' in X gibt mit $G = G' \cap A$. Hiermit folgt leicht die Behauptung.

(c) Ist $(G_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von A , so gilt mit $G^* := X \setminus A$:

$$K \subseteq A \cup (X \setminus A) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \cup G^*.$$

Da alle G_i und auch G^* offen sind, gibt es eine endliche Teilmenge J von I , so daß $K \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j \cup G^*$. Es folgt

$$A = K \cap A = \bigcup_{j \in J} (G_j \cap A) \cup \underbrace{(G^* \cap A)}_{=\emptyset} \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$$

und damit die Kompaktheit von A .

(d) ist klar nach (c) und (a). □

4.3. SATZ. Ist K eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums (X, τ) und ist $x \in X \setminus K$, so gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$, $K \subseteq V$.

BEWEIS. Da (X, τ) separiert ist, gibt es zu jedem $t \in K$ offene Umgebungen U_t von x und V_t von t mit $U_t \cap V_t = \emptyset$. Aus der offenen Überdeckung $(V_t)_{t \in K}$ von K können wir eine endliche Teilüberdeckung $(V_{t_j})_{j=1}^k$ auswählen. Mit $V := \bigcup_{j=1}^k V_{t_j}$ und $U := \bigcap_{j=1}^k U_{t_j}$

gilt nun: V ist offene Obermenge von K , U ist offene Umgebung von x und

$$U \cap V = \bigcap_{j=1}^k U_{t_j} \cap \bigcup_{l=1}^k V_{t_l} = \bigcup_{l=1}^k \left(\left(\bigcap_{j=1}^k U_{t_j} \right) \cap V_{t_l} \right) \subseteq \bigcup_{l=1}^k (U_{t_l} \cap V_{t_l}) = \emptyset.$$

□

4.4. FOLGERUNG. Sei (X, τ) ein Hausdorffraum.

- (a) Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist K abgeschlossen in (X, τ) .
- (b) Ist $K \subseteq X$ kompakt und $F \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $F \cap K$ kompakt.

BEWEIS. (a) Nach Satz 4.3 ist jedes $x \in X \setminus K$ innerer Punkt von $X \setminus K$. Also ist $X \setminus K$ offen und damit K abgeschlossen.

(b) Nach (a) ist K und daher auch $K \cap F$ abgeschlossen. Mit 3.2.(c) folgt die Kompaktheit von $K \cap F$. □

4.5. SATZ. Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann kompakt, wenn er die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, d.h. wenn gilt: Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen in (X, τ) mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so gibt es schon endlich viele $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} = \emptyset$.

Der Beweis wird geführt, indem man jeweils zu den Komplementen übergeht: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , so ist $\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = \emptyset$ und $A_i := X \setminus U_i$ abgeschlossen. Ist umgekehrt $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so ist $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i := X \setminus A_i$ eine offene Überdeckung von X . □

4.6. FOLGERUNG. Sei (X, τ) ein Hausdorffraum und $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie von kompakten Teilmengen mit $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Dann gibt es endlich viele $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $\bigcap_{j=1}^k K_{i_j} = \emptyset$.

BEWEIS. Sei $i_1 \in I$ beliebig. K_{i_1} versehen mit der von τ induzierten Topologie ist kompakt. Nach Folgerung 4.4 ist $A_i := K_{i_1} \cap K_i$ abgeschlossen für alle $i \in I$ und $\bigcap_{i \in I} A_i = K_{i_1} \cap \bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Mit Satz 4.5 folgt die Behauptung. □

4.7. SATZ. (X, τ_X) und (Y, τ_Y) seien topologische Räume. Ist $K \subseteq X$ kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist auch $f(K)$ kompakt.

BEWEIS. Ist $(G_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$ in (Y, τ_Y) , so ist $(f^{-1}(G_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K , hat also eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(G_{i_j}))_{j=1}^k$. Es folgt

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{j=1}^k f^{-1}(G_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^k \underbrace{f(f^{-1}(G_{i_j}))}_{\subseteq G_{i_j}} \subseteq \bigcup_{i=1}^k G_{i_j}$$

und damit die Kompaktheit von $f(K)$. □

4.8. FOLGERUNG. Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an.

4.9. SATZ. (X, τ_X) und (Y, τ_Y) seien Hausdorffräume und X sei kompakt. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive und stetige Abbildung, so ist f schon eine Homöomorphie.

BEWEIS. Es ist nur die Stetigkeit von $f^{-1} : Y \rightarrow X$ zu zeigen. Sei A eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von X . Nach Bemerkung 4.2 (c) ist A kompakt und daher auch $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ kompakt (nach Satz 4.5) und somit nach Folgerung 4.4 auch abgeschlossen in (Y, τ_Y) . Nach Satz 2.5 ist f^{-1} stetig. $\square$

Ist speziell $X = Y$ und sind τ_1, τ_2 zwei Topologien auf X , so erhalten wir, indem wir in Satz 4.9 $f = \text{id}_X$ wählen:

4.10. FOLGERUNG. *Zu einer separierten Topologie auf einer Menge X gibt es keine echt feinere kompakte.*

Um zeigen zu können, daß das topologische Produkt kompakter topologischer Räume wieder kompakt ist, benötigen wir das Zornsche Lemma:

4.11. ZORNSCHES LEMMA. *Sei $(X, \leq)$ eine nicht leere partiell geordnete Menge. Besitzt jede total geordnete Teilmenge K von X eine obere Schranke in X , so gibt es in X wenigstens ein maximales Element.*

Das Zornsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom, zum Wohlordnungssatz und auch zum nachfolgenden Satz von Tychonoff. Wir betrachten es hier als ein Axiom.

Ist X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen von X , so nennen wir eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X mit $U_i \in \mathcal{S}$ für alle $i \in I$ eine $\mathcal{S}$ -Überdeckung von X .

4.12. ALEXANDERSCHER SUBBASENSATZ. *Sei $\mathcal{S}$ Subbasis einer Topologie τ auf einer Menge X . Besitzt jede $\mathcal{S}$ -Überdeckung von X schon eine endliche Teilüberdeckung, so ist (X, τ) kompakt.*

BEWEIS. *Annahme:* X ist nicht kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in I}$ von X , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Die Menge

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ offene Überdeckung von } X \text{ ohne endliche Teilüberdeckung}\}$$

ist dann nicht leer und vermöge der Inklusion teilweise geordnet. Sei nun $\mathfrak{K}$ eine beliebige total geordnete Teilmenge von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}_* := \bigcup \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \in \mathfrak{K}\}$. Wir zeigen daß dann auch $\mathcal{G}_*$ eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung ist. Hätte nämlich $\mathcal{G}_*$ eine endliche Teilüberdeckung $(U_j)_{j=1}^k$, so gäbe es $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k \in \mathfrak{K}$ mit $U_j \in \mathcal{G}_j$ für $j = 1, \dots, k$. Da $\mathfrak{K}$ linear geordnet ist, wäre dann $\tilde{\mathcal{G}} := \bigcup_{j=1}^k \mathcal{G}_j \in \mathfrak{K} \subseteq \mathcal{F}$ im Widerspruch dazu, daß $\{U_1, \dots, U_k\}$ endliche Teilüberdeckung zu $\tilde{\mathcal{G}}$ ist. Somit ist $\mathcal{G}_*$ eine obere Schranke von $\mathfrak{K}$. Damit sind alle Voraussetzungen zum Zornschen Lemma erfüllt und $\mathcal{F}$ besitzt wenigstens ein maximales Element $\mathcal{G}_0$.

Wir betrachten $\mathcal{G}_S := \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{S}$ und zeigen, daß $\mathcal{G}_S$ eine Überdeckung von X ist.

Annahme: Es gibt einen Punkt $x \in X \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{G}_S} G$. Da $\mathcal{G}_0$ offene Überdeckung von X ist, ist $x \in V$ für ein $V \in \mathcal{G}_0$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis von τ ist und daher V eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$. Also gibt es endlich viele $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}$ mit $x \in S_1 \cap \dots \cap S_k$. Es folgt $S_1, \dots, S_k \notin \mathcal{G}_0$ (da sonst $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{G}_S = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{S}$ im Widerspruch zur Wahl von x). Wegen der maximalen Wahl von $\mathcal{G}_0$ besitzt $\mathcal{G}_0 \cup \{S_j\}$ für alle $j = 1, \dots, k$ eine endliche Teilüberdeckung $\{G_{1,j}, \dots, G_{n(j),j}, S_j\}$. Es folgt

$$X = \left(\bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{n(j)} \underbrace{G_{i,j}}_{\in \mathcal{G}_0} \right) \cup \underbrace{\left(\bigcap_{j=1}^k S_j \right)}_{\subseteq V \in \mathcal{G}_0}$$

im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{G}_0$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. $\square$

4.13. SATZ VON TYCHONOFF. Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein nicht leeres topologisches Produkt topologischer Räume (X_i, τ_i) , $i \in I$. Genau dann ist X kompakt (bzw. kompakt und separiert), wenn alle X_i , $i \in I$, kompakt (bzw. kompakt und separiert) sind.

BEWEIS. Daß die Produkttopologie auf X genau dann separiert ist, wenn alle (X_i, τ_i) , $i \in I$, separiert sind, wurde in den Übungen gezeigt (vergl. Aufgabe 3.3).

Ist X kompakt in der Produkttopologie τ , so sind nach Definition der Produkttopologie die kanonischen Projektionen $p_i : X \rightarrow X_i$ mit $p_i((x_j)_{j \in I}) := x_i$ für alle $i \in I$ stetig und mit Satz 4.7 folgt die Kompaktheit von $X_i = p_i(X)$ für alle $i \in I$.

Seien nun alle X_i , $i \in I$, kompakt. Gemäß 3.9 ist eine Subbasis für die Produkttopologie τ auf X gegeben durch $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{p_i^{-1}(G) | G \in \tau_i\}$. Für $j \in I$ definiert man

$$\mathcal{S}_j := \{p_j^{-1}(G) | G \in \tau_j\}.$$

Insbesondere gilt für alle $j \in I$ und alle $U \in \mathcal{S}_j$: $p_j(U) \in \tau_j$ und $U = p_j^{-1}(p_j(U))$. Sei nun $\mathcal{U} = (U_k)_{k \in K}$ eine beliebige $\mathcal{S}$ -Überdeckung von X und $K_j := \{k \in K | U_k \in \mathcal{S}_j\}$ für $j \in I$. Wegen $\mathcal{S} = \bigcup_{j \in I} \mathcal{S}_j$ folgt $K = \bigcup_{j \in I} K_j$.

Annahme: Keine der Familien $\mathcal{U}_j := (U_k)_{k \in K_j}$ ($j \in I$) überdeckt X . Nach Konstruktion von $\mathcal{U}_j$ ist dies nur möglich, wenn zu jedem $j \in I$ ein $x_j = (x_{j,i})_{i \in I} \in X$ existiert, so daß $p_j^{-1}(x_j) \cap U_k = \emptyset$ für alle $k \in K_j$. Mit $x := (x_{i,i})_{i \in I}$ gilt $p_j(x) = x_{j,j} \notin \bigcup_{k \in K_j} p_j(U_k)$ für alle $j \in I$ und daher $x \notin \bigcup_{k \in K} U_k = \bigcup_{j \in I} \bigcup_{k \in K_j} U_k$ im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist. Also war die Annahme falsch, es muß wenigstens ein $j \in I$ existieren, so daß $X \subseteq \bigcup_{k \in K_j} U_k$.

Somit ist $(p_j(U_k))_{k \in K_j}$ eine offene Überdeckung von X_j , aus der wir wegen der Kompaktheit von (X_j, τ_j) eine endliche Teilüberdeckung $\{p_j(U_{k_1}), \dots, p_j(U_{k_r})\}$ auswählen können. Dann ist $(p_j^{-1}(p_j(U_{k_\nu})))_{\nu=1}^r = (U_{k_\nu})_{\nu=1}^r$ eine endliche Überdeckung von X und Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

Da jede $\mathcal{S}$ -Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt folgt nach dem Alexanderschen Subbasensatz 4.12 die Kompaktheit von (X, τ) . $\square$

Ein metrischer Raum (X, d) ist bekanntlich genau dann kompakt, wenn jede Folge aus (X, d) einen Häufungswert besitzt, d.h. genau dann, wenn jede Folge aus X eine in (X, d) konvergente Teilfolge hat. Das dies ist im nicht metrisierbaren Fall im allgemeinen nicht mehr stimmt, zeigt das folgende Beispiel.

4.14. BEISPIEL. Sei I das kompakte Intervall $[-1, 1]$ versehen mit der euklidischen Topologie. und sei $\mathbb{M}$ die Menge aller streng monoton wachsenden Folgen in $\mathbb{N}$. Nach dem Satz von Tychonoff ist $X := I^{\mathbb{M}} = \prod_{\mu \in \mathbb{M}} I$ versehen mit der Produkttopologie kompakt. Wir definieren eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty = ((x_n(\mu))_{\mu \in \mathbb{M}})_{n=1}^\infty$ von Elementen aus X durch

$$x_n(\mu) := \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = \mu(k) \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Annahme: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Insbesondere ist $\nu = (\nu(k))_{k=1}^\infty \in \mathbb{M}$. Wegen der Stetigkeit der Projektion p_ν von $X = I^{\mathbb{M}}$ auf die Komponente mit Index ν muß dann auch die Folge $(p_\nu(x_{\nu(k)}))_{k=1}^\infty$ in $I = [-1, 1]$ konvergent sein. Dies ist jedoch wegen $p_\nu(x_{\nu(k)}) = x_{\nu(k)}(\nu) = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nicht der Fall. Daher hat die angegebene Folge keine konvergente Teilfolge. In Satz 4.19 werden wir sehen, daß sie aber ein konvergentes Teilnetz besitzt.

Zunächst führen wir den Begriff eines Teilnetzes ein:

4.15. DEFINITION. Seien $(\mathbb{A}, \leq)$ und $(\mathbb{B}, \preceq)$ zwei partiell geordnete Mengen. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ heißt *kofinal*, falls zu jedem $\alpha \in \mathbb{A}$ ein $\beta_\alpha \in \mathbb{B}$ existiert, so daß für alle $\beta \succeq \beta_\alpha$ gilt $\alpha \leq \varphi(\beta)$.

Sind $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ und $(y_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ zwei Netze in einer nicht leeren Menge X . Wir nennen $(y_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ ein *Teilnetz*, falls $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$ für eine kofinale Abbildung $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ und alle $\beta \in \mathbb{B}$ gilt.

Eine Teilfolge einer Folge ist stets auch ein Teilnetz. Jedoch muß ein Teilnetz einer Folge keine Teilfolge sein.

Wie bei Folgen und Teilfolgen gilt:

4.16. SATZ. Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein in einem topologischen Raum (X, τ) gegen einen Punkt $a \in X$ konvergentes Netz, so konvergiert auch jedes Teilnetz von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ gegen a .

BEWEIS. Sei $(y_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ ein beliebiges Teilnetz und sei $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ die entsprechende kofinale Abbildung. Ist U eine beliebige Umgebung U von a in (X, τ) . Wegen $x_\alpha \rightarrow a$ gibt es ein $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \geq \alpha_0$. Da φ kofinal ist, gibt es ein $\beta_0 \in \mathbb{B}$ mit $\alpha_0 \leq \varphi(\beta)$ für alle $\beta \succeq \beta_0$. Also folgt $y_\beta = x_{\varphi(\beta)} \in U$ für alle $\beta \in \mathbb{B}$ mit $\beta \succeq \beta_0$ und es gilt $y_\beta \rightarrow a$. $\square$

Auch der Begriff des Häufungswertes läßt sich auf Netze übertragen:

4.17. DEFINITION. Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein Netz in einem topologischen Raum (X, τ) . Ein Punkt $a \in X$ heißt *Häufungswert* von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$, falls es zu jedem $\alpha \in \mathbb{A}$ und jeder Umgebung U von a ein $\beta \in \mathbb{A}$ existiert mit $\alpha \leq \beta$ und $x_\beta \in U$.

4.18. SATZ. Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein Netz in einem topologischen Raum (X, τ) . Für einen Punkt $a \in X$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) a ist ein Häufungswert von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$.
- (b) Es gibt ein gegen a konvergentes Teilnetz von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$.

BEWEIS. Sei a ein Häufungswert von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Wir setzen $\mathbb{B} := \mathbb{A} \times \mathfrak{U}(a)$, wobei $\mathfrak{U}(a)$ wieder die Menge aller Umgebungen von a in (X, τ) bezeichne. $\mathbb{B}$ ist partiell geordnet vermöge

$$(\alpha_1, U_1) \preceq (\alpha_2, U_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad (\alpha_1 \leq \alpha_2 \quad \text{und} \quad U_2 \subseteq U_1)$$

für alle $(\alpha_1, U_1), (\alpha_2, U_2) \in \mathbb{B}$. Nach Definition des Häufungswertes gibt es zu jedem $(\alpha, U) \in \mathbb{B}$ ein $\varphi(\alpha, U) \in \mathbb{A}$ mit $\alpha \leq \varphi(\alpha, U)$ und $x_{\varphi(\alpha, U)} \in U$. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ ist also kofinal und $(x_{\varphi(\alpha, U)})_{(\alpha, U) \in \mathbb{B}}$ ist ein gegen a konvergentes Teilnetz von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$.

Es gebe nun ein gegen a konvergentes Teilnetz $(y_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Sei $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ die entsprechende kofinale Abbildung und sei U eine beliebige Umgebung von a und $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ beliebig. Dann gibt es ein $\beta_1 \in \mathbb{B}$, mit $y_\beta = x_{\varphi(\beta)} \in U$ für alle $\beta \geq \beta_1$. Da $\mathbb{A}$ gerichtet ist, gibt es ein $\alpha_1 \in \mathbb{A}$ mit $\alpha_0 \leq \alpha_1$ und $\varphi(\beta_1) \leq \alpha_1$. Da $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ kofinal ist, gibt es zu α_1 ein $\beta_0 \in \mathbb{B}$ mit $\alpha_1 \leq \varphi(\beta)$ für alle $\beta \geq \beta_0$. Da $\mathbb{B}$ gerichtet ist gibt es schließlich ein $\beta_* \in \mathbb{B}$ mit $\beta_0 \leq \beta_*$ und $\beta_1 \leq \beta_*$. Insbesondere gilt $y_{\beta_*} = x_{\varphi(\beta_*)} \in U$ und $\alpha_0 \leq \varphi(\beta_*)$. Also ist a ein Häufungswert von $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$. $\square$

4.19. SATZ. Für einen topologischen Raum (X, τ) sind äquivalent:

- (a) (X, τ) ist kompakt.
- (b) Jedes Netz in X hat ein in (X, τ) konvergentes Teilnetz.

BEWEIS. Sei (X, τ) kompakt und sei $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein beliebiges Netz in X .

Annahme: $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ hat kein konvergentes Teilnetz und somit nach Satz 4.18 auch keinen Häufungswert. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung V_x von x und ein $\alpha_x \in \mathbb{A}$ mit $x_\alpha \notin V_x$ für alle $\alpha \geq \alpha_x$. Nach Definition der Umgebung gibt es dann auch eine offene Menge $U_x \subseteq V_x$ mit $x \in U_x$. Diese erfüllt dann ebenfalls $x_\alpha \notin U_x$ für alle $\alpha \geq \alpha_x$. Aus der offenen Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ können wir wegen der Kompaktheit von (X, τ) eine endliche Teilüberdeckung $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ auswählen. Da $\mathbb{A}$ gerichtet ist, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{A}$ mit $\alpha_{x_j} \leq \alpha$ für $j = 1, \dots, n$. Hieraus erhält man den Widerspruch

$$x_\alpha \notin \bigcup_{j=1}^n U_{x_j} = X.$$

Die Annahme war also falsch. Daher hat $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ einen Häufungswert.

Für die Rückrichtung machen wir die *Annahme:* (b) ist erfüllt, aber (X, τ) ist nicht kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Die Menge $\mathcal{F}(I)$ der endlichen Teilmengen von I ist eine durch die Inklusion $\subseteq$ teilweise geordnete, gerichtete Menge. Da $(U_i)_{i \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, gilt:

$$(4.1) \quad \forall F \in \mathcal{F}(I) \quad \exists x_F \notin \bigcup_{i \in F} U_i.$$

Nach Voraussetzung hat das hierdurch definierte Netz $(x_F)_{F \in \mathcal{F}(I)}$ einen Häufungswert $a \in X$.

Die Menge $I_a := \{i \in I; a \in U_i\}$ ist nicht leer, da $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. Sei nun $k \in I_a$ beliebig. Dann ist $\{k\} \in \mathcal{F}(I)$. Nach Definition des Häufungswertes gibt es zu der Umgebung U_k von a ein $F \in \mathcal{F}(I)$ mit $\{k\} \subseteq F$ (d.h. mit $k \in F$) und $x_F \in U_k$. Dies steht im Widerspruch zu (4.1). Also muß (X, τ) doch kompakt sein. $\square$

4.20. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *lokalkompakt*, falls jeder Punkt aus X eine kompakte Umgebung besitzt.

4.21. BEISPIELE. (a) Jeder kompakte topologische Raum ist natürlich auch lokalkompakt.

(b) $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{C}^n$ sind, versehen mit der euklidischen Topologie lokalkompakt aber nicht kompakt.

(c) Ist X eine Menge, so ist X - versehen mit der diskreten Topologie - lokalkompakt, da für jedes $x \in X$ die Menge $\{x\}$ eine kompakte Umgebung von x ist.

4.22. SATZ. Ist (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum, so besitzt (X, τ) eine Umgebungsbasis von kompakten Mengen.

BEWEIS. Sei x ein beliebiger Punkt in X . Wir müssen zeigen, daß jede Umgebung von x eine kompakte Umgebung von x enthält. Sei also U eine beliebige Umgebung von x in (X, τ) . Da (X, τ) lokalkompakt ist, besitzt x eine kompakte Umgebung K . Dann ist auch $U \cap K$ eine Umgebung von x enthält also eine offene Menge G mit $x \in G$. Die Menge $K \setminus G = K \cap (X \setminus G)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von K und daher nach Folgerung 4.4 kompakt mit $x \notin K \setminus G$. Nach Satz 4.3 gibt es dann offene Mengen $V, W \in \tau$ mit $V \cap W = \emptyset$, $x \in V$, $K \setminus G \subseteq W$. Dann ist $G \cap V$ eine offene Umgebung von x , $K \setminus W$ ist kompakt und es gilt

$$x \in G \cap V \subseteq K \setminus W \subseteq G \subseteq U.$$

$K \setminus W$ ist also eine kompakte in U enthaltene Umgebung von x . $\square$

4.23. SATZ (Alexandroffsche Einpunktkompaktifizierung). *Zu jedem lokalkompakten Hausdorffraum (X, τ) gibt es einen bis auf eine Homöomorphie eindeutigen bestimmten kompakten Hausdorffraum (X_∞, τ_∞) , der einen Punkt enthält, den wir mit ∞ bezeichnen, so daß $\tilde{X} := X_\infty \setminus \{\infty\}$ versehen mit der Unterraumtopologie homöomorph zu (X, τ) ist. Ist (X, τ) nicht kompakt, so ist $\tilde{X}$ dicht in (X_∞, τ_∞) .*

BEWEIS. (a) *Existenz:* Wir definieren $X_\infty := X \cup \{\infty\}$, wobei ∞ ein nicht in X enthaltener Punkt sei, und $\tau_\infty := \tau \cup \mathcal{U}_\infty$ wobei

$$\mathcal{U}_\infty := \{X_\infty \setminus K; K \text{ ist kompakte Teilmenge von } (X, \tau)\}.$$

Offensichtlich ist $X_\infty = X_\infty \setminus \emptyset \in \mathcal{U}_\infty \subseteq \tau_\infty$ und $\emptyset \in \tau \subset \tau_\infty$.

Ist $(X_\infty \setminus K_i)_{i \in I}$, $I \neq \emptyset$, eine beliebige Familie aus $\mathcal{U}_\infty$, $K_i \subseteq X$ kompakt für alle $i \in I$, so ist ihre Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} (X \setminus K_i) = X_\infty \setminus \bigcap_{i \in I} K_i \in \mathcal{U}_\infty,$$

da beliebige Durchschnitte von kompakten Mengen nach Folgerung 4.4 kompakt sind. Ist $I = \{1, \dots, n\}$ endlich, so hat man

$$\bigcap_{j=1}^n (X_\infty \setminus K_j) = X_\infty \setminus \bigcup_{j=1}^n K_j \in \mathcal{U}_\infty,$$

da endliche Vereinigungen von kompakten Mengen kompakt sind. Aus der Definition der Topologie folgt ferner, daß beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von Mengen aus τ wieder in τ liegen.

Ist nun $\mathcal{G} \subseteq \tau_\infty$ beliebig mit $\mathcal{G} \cap \mathcal{U}_\infty \neq \emptyset$ und mit $\mathcal{G} \cap \tau \neq \emptyset$, so folgt

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = \bigcup_{G \in \mathcal{G} \cap \mathcal{U}_\infty} G \cup \bigcup_{G \in \mathcal{G} \cap \tau} G = (X_\infty \setminus K) \cup G_0 = X_\infty \setminus (K \cap (X \setminus G_0))$$

mit einer in (X, τ) kompakten Menge K und einer offenen Menge $G_0 \in \tau$. Da $K \cap (X \setminus G_0)$ als Durchschnitt einer kompakten Menge mit einer abgeschlossenen Menge nach Folgerung 4.4 kompakt in (X, τ) ist folgt $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{U}_\infty \subseteq \tau_\infty$.

Ist schließlich $G = \bigcup_{j=1}^n G_j$ endlicher Durchschnitt von Mengen aus τ_∞ mit $G_j \in \tau$ für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, n\}$, So ist G von der Gestalt $G = (X_\infty \setminus K) \cap G_0 = (X \setminus K) \cap G_0$ mit einer τ -kompakten Menge $K \subseteq X$ und einer τ -offenen Menge G_0 . Da $X \setminus K$ als Komplement der nach Folgerung 4.4 abgeschlossenen Menge K offen in (X, τ) ist, folgt $G \in \tau \subset \tau_\infty$.

Damit ist gezeigt, daß τ_∞ eine Topologie auf X_∞ ist. Die von τ_∞ auf X induzierte Unterraumtopologie stimmt offensichtlich mit τ überein.

Die Topologie τ_∞ ist separiert: Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es wegen der Separiertheit von τ offene Mengen $G_x, G_y \in \tau \subset \tau_\infty$ mit $x \in G_x, y \in G_y$ und $G_x \cap G_y = \emptyset$. Ist $x \in X$ und $y = \infty$, so beachten wir, daß x in (X, τ) eine kompakte Umgebung K besitzt, da (X, τ) lokalkompakt ist. K ist auch Umgebung zu x in (X_∞, τ_∞) (wegen $x \in \text{int } K \in \tau \subset \tau_\infty$). Nach Definition von τ_∞ ist $X_\infty \setminus K$ eine zu K disjunkte Umgebung von $y = \infty$.

Ist nun $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X_∞ , so gibt es ein $k \in I$ mit $\infty \in U_k$. Dann hat U_k die Gestalt $U_k = X_\infty \setminus K$ mit einer in (X, τ) kompakten Menge K . Es folgt

$$K = K \cap \bigcup_{i \in I} U_i = K \cap \bigcup_{i \in I} (U_i \cap X) \subseteq \bigcup_{i \in I} (U_i \cap X).$$

Da die Mengen $U_i \cap X$ offen in (X, τ) sind, gibt es wegen der Kompaktheit von K endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ und es folgt $X_\infty = U_k \cup K = U_k \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Damit ist gezeigt, daß jede offene Überdeckung von X_∞ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. daß (X, τ_I) ein kompakter topologischer Raum ist.

Wegen Lemma 4.4 ist X genau dann in (X_∞, τ_∞) abgeschlossen, wenn X kompakte Teilmenge von (X_∞, τ_∞) ist. Da τ mit der von τ_∞ auf X induzierten Unterraumtopologie übereinstimmt, muß dann (X, τ) ein kompakter topologischer Raum sein. Ist (X, τ) also nicht kompakt, so ist die Abschließung $\overline{X}$ von X in (X_∞, τ_∞) von X verschieden, muß also mit X_∞ übereinstimmen.

(b) *Eindeutigkeit*: Sei auch $(X'_\infty, \tau'_\infty)$ ein Raum mit den Eigenschaften des Satzes und X' ein in der von τ'_∞ induzierten Unterraumtopologie τ' zu (X, τ) homöomorpher topologischer Teilraum, so daß $X'_\infty \setminus X' = \{\infty'\}$ mit einem nicht in X' liegenden Punkt ∞' . Ist $f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ eine Homöomorphie, so definieren wir $F : X_\infty \rightarrow X'_\infty$ durch $F(x) := f(x)$ für alle $x \in X$ und $F(\infty) := \infty'$. Dann ist F bijektiv und F sowie F^{-1} sind in allen Punkten aus X bzw. X' stetig, da f und f^{-1} stetig sind. Ist U' eine offene Umgebung von ∞' , so ist $K' := X'_\infty \setminus U'$ abgeschlossen in $(X'_\infty, \tau'_\infty)$ also nach Folgerung 4.4 kompakte Teilmenge von X' . Da f^{-1} auf X' in der Unterraumtopologie stetig ist, ist auch $F^{-1}(K') = f^{-1}(K')$ in (X, τ) kompakt und somit $F^{-1}(U') = X_\infty \setminus F^{-1}(K')$ eine offene Umgebung von ∞ in (X_∞, τ_∞) . Also ist F auch in ∞ stetig. Ist U eine beliebige offene Umgebung von ∞ in (X_∞, τ_∞) , so ist $U = X_\infty \setminus K$ für eine kompakte Teilmenge K von (X, τ) . Wegen der Stetigkeit von f , ist dann $f(K)$ kompakt und daher auch abgeschlossene Menge in (X', τ') und somit $(F^{-1})^{-1}(U) = F(U) = F(X_\infty \setminus K) = X'_\infty \setminus f(K)$ eine offene Umgebung von ∞' in $(X'_\infty, \tau'_\infty)$. Also sind F und F^{-1} auf X_∞ bzw. X'_∞ stetig, d.h. F ist eine Homöomorphie. $\square$

Sei nun (K, τ) ein kompakter topologischer Raum und (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren auf der Menge $C(K, X)$ aller auf K stetigen X -wertigen Funktionen eine Metrik d_K durch

$$d_K(f, g) := \sup_{t \in K} d(f(t), g(t)) \quad (f, g \in C(K, X)).$$

Sind nämlich $f, g \in C(K, X)$, so ist die durch $(f, g)(t) := (f(t), g(t))$, $t \in K$, definierte Funktion $(f, g) : K \rightarrow X \times X$ stetig, wenn wir $X \times X$ mit der durch

$$d_\times((x, y), (u, v)) := d(x, u) + d(y, v) \quad ((x, y), (u, v) \in X \times X)$$

definierten Produktmetrik versehen. Da $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist (vergl. [1], Teil (c) der Bemerkung vor Lemma 8.10), die Kompaktheit und Beschränktheit von

$$\{d(f(t), g(t)) ; t \in K\}$$

nach Folgerung 4.8 (als stetiges Bild des kompakten topologischen Raums K unter der stetigen Abbildung $d_\times \circ (f, g) : K \rightarrow \mathbb{R}$). Insbesondere ist also $d_K(f, g) < \infty$ für alle $f, g \in C(K, X)$. Die Metrikeigenschaften (M1)-(M3) zeigt man durch direkte Rechnung.

4.24. SATZ. *Sei (K, τ) ein kompakter topologischer Raum und sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der metrische Raum $(C(K, X), d_K)$ vollständig.*

BEWEIS. Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Cauchyfolge in $(C(K, X), d_K)$. Wegen

$$d(f_n(s), f_m(s)) \leq \sup_{t \in K} d(f_n(t), f_m(t)) \quad \text{für alle } s \in K, n, m \in \mathbb{N}$$

ist für alle $s \in K$ die Folge $(f_n(s))_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in (X, d) und daher konvergent gegen einen Wert $f(s) \in X$. Hierdurch ist eine Abbildung $f : K \rightarrow X$ definiert. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall s \in K \quad \forall n, m \geq n_0 : \quad d(f_n(s), f_m(s)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mit $m \rightarrow \infty$ folgt wegen der Stetigkeit der Metrik d :

$$\forall s \in K \quad \forall n \geq n_0 : \quad d(f_n(s), f(s)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

und damit insbesondere

$$(4.2) \quad \forall n \geq n_0 : \sup_{s \in K} d(f_n(s), f(s)) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

d.h.

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in K} d(f_n(s), f(s)) = 0.$$

Sei nun $t \in K$ beliebig und $\varepsilon > 0$ sowie $n_0 \in \mathbb{N}$ mit (4.2). Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in t gibt es eine Umgebung U von t in (K, τ) mit

$$\forall s \in U : \quad d(f_{n_0}(s), f_{n_0}(t)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \forall s \in U : \quad d(f(s), f(t)) &\leq d(f(s), f_{n_0}(s)) + d(f_{n_0}(s), f_{n_0}(t)) + d(f_{n_0}(t), f(t)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $f \in C(K, X)$ und wegen (4.3) gilt $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ in $(C(K, X), d_K)$. $\square$

Eine Teilmenge eines topologischen Raums, deren Abschließung kompakt ist, heißt *relativkompakt*.

Eine Familie H von stetigen Abbildungen von einem topologischen Raum (Y, τ) in einen metrischen Raum (X, d) heißt *gleichstetig in einem Punkt* $y_0 \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von y_0 in (Y, τ) gibt mit

$$\forall y \in U \quad \forall h \in H : \quad d(h(y), h(y_0)) < \varepsilon.$$

Ist H in allen Punkte $y \in Y$ gleichstetig, so sagen wir: H ist auf Y gleichstetig.

4.25. SATZ VON ARZELA–ASCOLI. Sei (K, τ) ein kompakter topologischer Raum und (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für $H \subseteq C(K, X)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) H ist relativkompakt in $(C(K, X), d_K)$.
- (b) H erfüllt die beiden folgenden Bedingungen:
 - (i) Für alle $t \in K$ ist $H(t) := \{h(t) ; h \in H\}$ relativkompakt in (X, d) .
 - (ii) H ist gleichstetig.

BEWEIS. “(a) $\implies$ (b)”: Sei also H relativkompakt und somit $\overline{H}$ kompakt in $(C(K, X), d_K)$. Ist $t \in K$ beliebig, so ist die Punktevaluation $\delta_t : (C(K, X), d_K) \rightarrow (X, d)$, $f \mapsto f(t)$ in t , wegen

$$d(\delta_t(f), \delta_t(g)) = d(f(t), g(t)) \leq d_K(f, g) \quad \text{für alle } f, g \in C(K, X)$$

stetig. Also ist $\overline{H}(t) = \delta_t(\overline{H})$ kompakt und $H(t) \subseteq \overline{H}(t)$ somit relativkompakt in (X, d) . Damit ist (i) gezeigt.

Annahme: (ii) ist nicht erfüllt, d.h. es gibt ein $t_0 \in K$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß für alle $U \in \mathfrak{U}(t_0)$ eine Funktion $h_U \in H$ und ein Punkt $t_U \in U$ existiert mit $d(h_U(t_0), h_U(t_U)) \geq \varepsilon_0$. $\mathfrak{U}(t_0)$ ist gerichtet bezüglich der durch $U \preceq V : \iff V \subseteq U$ gegebenen Ordnungsrelation. Da $\overline{H}$ kompakt ist, besitzt das Netz $(h_U)_{U \in \mathfrak{U}(t_0)}$ ein bezüglich d_K gegen eine Abbildung $h \in \overline{H}$ konvergentes Teilnetz $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ mit assoziierter kofinaler Abbildung $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathfrak{U}(t_0)$. Wegen der Stetigkeit von h in t_0 gibt es eine Umgebung U_0 von t_0 mit

$$\forall t \in U_0 : \quad d(h(t_0), h(t)) < \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Wegen $f_\alpha \rightarrow h$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{A}$ mit $\varphi(\alpha) \subseteq U_0$ und $d_K(f_\alpha, h) < \frac{\varepsilon_0}{3}$. Es folgt

$$\begin{aligned} d(h_{\varphi(\alpha)}(t_0), h_{\varphi(\alpha)}(t_{\varphi(\alpha)})) &= d(f_\alpha(t_0), f_\alpha(t_{\varphi(\alpha)})) \\ &\leq d(f_\alpha(t_0), h(t_0)) + d(h(t_0), h(t_{\varphi(\alpha)})) + d(h(t_{\varphi(\alpha)}), f_\alpha(t_{\varphi(\alpha)})) \\ &\leq d_K(f_\alpha, h) + d(h(t_0), h(t_{\varphi(\alpha)})) + d_K(h, f_\alpha) \\ &< \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Definition der Funktionen h_U und der Punkte t_U , $U \in \mathfrak{U}(t_0)$.

“(b) $\implies$ (a)”: Eine direkte Überlegung zeigt, daß die Eigenschaften (i) und (ii) erhalten bleiben, wenn wir bei H zur Abschließung übergehen. Wir setzen daher im weiteren ohne Einschränkung voraus, daß H abgeschlossen ist.

Sei $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein beliebiges Netz in H . Wir zeigen, daß $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein gegen eine Abbildung $h \in H$ konvergentes Teilnetz besitzt. Nach Satz 4.19 folgt dann die Kompaktheit von $\overline{H}$.

Wegen (i) ist $\overline{H(t)}$ kompakt für alle $t \in K$. Nach dem Satz von Tychonoff ist dann auch das topologische Produkt $\prod_{t \in K} \overline{H(t)}$ kompakt. Daher besitzt das Netz $((h_\alpha(t))_{t \in K})_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein in der Produkttopologie gegen ein $(f(t))_{t \in K} \in \prod_{t \in K} \overline{H(t)}$ konvergentes Teilnetz $((f_\beta(t))_{t \in K})_{\beta \in \mathbb{B}}$. Nach Aufgabe 3.3 ist dieses Teilnetz komponentenweise konvergent. Wie in Aufgabe 2.5 gezeigt wurde, ist daher für alle $t \in K$ das Netz $(f_\beta(t))_{\beta \in \mathbb{B}}$ ein Cauchynetz in (X, d) .

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von H gibt es zu jedem $t \in K$ eine offene Umgebung U_t von t mit

$$(4.4) \quad \forall s \in U_t \quad \forall h \in H : \quad d(h(t), h(s)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aus der offenen Überdeckung $(U_t)_{t \in K}$ von K können wir wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $U_{t_1}, \dots, U_{t_m}$ auswählen. Da das Netz $(f_\beta(t_j))_{\beta \in \mathbb{B}}$ ein Cauchynetz in (X, d) ist, gibt es ein $\beta_j \in \mathbb{B}$ mit

$$(4.5) \quad \forall \beta, \gamma \geq \beta_j : \quad d(f_\beta(t_j), f_\gamma(t_j)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

($j=1, \dots, m$). Da $\mathbb{B}$ gerichtet ist, gibt es ein $\beta_0 \in \mathbb{B}$ mit $\beta_j \leq \beta_0$ für alle $j = 1, \dots, m$.

Sei nun $t \in K$ beliebig. Dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $t \in U_{t_j}$. Für alle $\beta, \gamma \in \mathbb{B}$ mit $\beta_0 \leq \beta$ und $\beta_0 \leq \gamma$ folgt dann mit (4.4) und (4.5):

$$\begin{aligned} d(f_\beta(t), f_\gamma(t)) &\leq d(f_\beta(t), f_\beta(t_j)) + d(f_\beta(t_j), f_\gamma(t_j)) + d(f_\gamma(t_j), f_\gamma(t)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{11}{12}\varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $\beta, \gamma \geq \beta_0$:

$$d_K(f_\beta, f_\gamma) = \sup_{t \in K} d(f_\beta(t), f_\gamma(t)) \leq \frac{11}{12}\varepsilon < \varepsilon.$$

$(f_\beta)_{\beta \in \mathbb{B}}$ ist also ein Cauchynetz in dem nach Satz 4.24 wegen der Vollständigkeit von (X, d) vollständigen metrischen Raum $(C(K, X), d_K)$ und daher nach Aufgabe 2.5 (b) konvergent in $(C(K, X), d_K)$ gegen eine Abbildung $h \in C(K, X)$. Da jede Umgebung von h Punkte aus H enthält, liegt h in $\overline{H} = H$. $\square$

Man beachte, daß im Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli die Kompaktheit von K und die Vollständigkeit von (X, d) nur für den Beweis der Implikation (b) $\implies$ (a) benötigt wurde.

Im Fall das $X = \mathbb{K}^N$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) versehen mit der euklidischen Metrik ist, ist eine Teilmenge von $\mathbb{K}^N$ genau dann relativkompakt, wenn Sie beschränkt ist. Wir erhalten also:

4.26. FOLGERUNG. Ist (K, τ) ein kompakter topologischer Raum und sei $C(K, \mathbb{K}^N)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$. Für eine Teilmenge $H \subset C(K, \mathbb{K}^N)$ sind äquivalent:

- (a) H ist kompakt in $(C(K, \mathbb{K}^N), \|\cdot\|_K)$
- (b) H ist punktweise beschränkt, gleichstetig und abgeschlossen.
- (c) H ist beschränkt in dem Banachraum $(C(K, \mathbb{K}^N), \|\cdot\|_K)$, gleichstetig und abgeschlossen.

BEWEIS. (c) $\implies$ (b) ist offensichtlich. (b) $\implies$ (a) gilt dem Satz 4.25 von Arzelà-Ascoli und (a) $\implies$ (c) folgt aus der Tatsache, daß in einem normierten Raum jede kompakte Teilmenge schon beschränkt und abgeschlossen ist und die Gleichstetigkeit nach dem Satz 4.25 von Arzelà-Ascoli gilt. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 4.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $\alpha \geq 0$ sei $M_\alpha := \prod_{k=1}^\infty \{x \in \mathbb{K}; |x| \leq k^{-\alpha}\}$.

4.1. AUFGABE. Für welche $\alpha \geq 0$ ist M_α eine kompakte Teilmenge von

- (a) $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ bzw. (b) $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$?

4.2. AUFGABE. Seien $K_1, \dots, K_n$ endlich viele kompakte Teilmengen eines topologischen Raums (X, τ) . Zeigen Sie, daß dann auch $K_1 \cup \dots \cup K_n$ kompakt in (X, τ) ist.

4.3. AUFGABE. Sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum (K, τ) und sei $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ ein punktweise auf K gegen f konvergentes Netz (d.h. mit $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in K$). Es gelte

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{A} : \quad \alpha \leq \beta \implies \forall x \in K : \quad f_\alpha(x) \leq f_\beta(x).$$

Zeigen Sie, daß $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ dann schon gleichmäßig auf K gegen f konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die Mengen $U_\alpha := \{x \in K; 0 \leq f(x) - f_\alpha(x) < \varepsilon\}$.

4.4. AUFGABE. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum und seien $G_1, G_2 \subseteq X$ offene Teilmengen von X . Zeigen Sie, daß dann auch $G_1 \setminus G_2$, versehen mit der Relativtopologie von τ , ein lokalkompakter Hausdorffraum ist.

4.5. AUFGABE. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge aus X eine in (X, τ) konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie, daß ein abzählbares topologisches Produkt von folgenkompakten topologischen Räumen wieder folgenkompakt ist.

Hinweis: Diagonalfolgenverfahren.

4.6. AUFGABE. Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie, daß es zu jeder kompakten Teilmenge K von X eine offene Menge $G \subseteq X$ und eine kompakte Menge $H \subseteq G$ gibt mit $K \subseteq G \subseteq H$.

4.7. AUFGABE. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *abzählbar im Unendlichen*, falls X eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist. Zeigen Sie: Für einen lokalkompakten Hausdorffraum (X, τ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) (X, τ) ist abzählbar im Unendlichen.
- (b) Der Punkt ∞ hat in der Alexandroffschen Einpunktkompaktifizierung von (X, τ) eine abzählbare Umgebungsbasis.
- (c) (X, τ) hat eine kompakte Ausschöpfung, d.h. Es gibt eine Folge $(K_n)_{n=0}^\infty$ von kompakten Teilmengen von X mit

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad K_n \subseteq \text{int}(K_{n+1}) \subseteq X = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k.$$

Die folgende Aufgabe zeigt, daß in Folgerung 4.4 auf die Voraussetzung der Separiertheit nicht verzichtet werden kann.

4.8. AUFGABE. Sei $X := \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$ versehen mit der euklidischen Topologie. Wir definieren auf X eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$z \sim w : \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = |w| & \text{falls } |z| < 1 \\ z = w & \text{falls } |z| = 1. \end{cases}$$

und versehen den zugehörigen Quotientenraum $X/\sim$ mit der Quotiententopologie $\tau_\sim$. Zeigen Sie:

- (a) $(X/\sim, \tau_\sim)$ ist ein T_1 -Raum aber kein T_2 -Raum.
- (b) $(X/\sim, \tau_\sim)$ ist kompakt.
- (c) Ist $\pi : X \rightarrow X/\sim$ die kanonische Surjektion, so ist π eine offene Abbildung (bildet also offene Teilmengen von X auf offene Teilmengen von $(X/\sim, \tau_\sim)$ ab).
- (d) Sind $z_1, z_2 \in X$ zwei voneinander verschiedene Punkte mit $|z_1| = |z_2| = 1$, so gibt es kompakte Umgebungen V_j von $\pi(z_j)$, $j = 1, 2$, deren Schnittmenge nicht kompakt in $(X/\sim, \tau_\sim)$ ist.

4.9. AUFGABE. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *nach oben* bzw. *nach unten halbstetig*, $x \in X$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x gibt mit $f(y) < f(x) + \varepsilon$ (bzw. $f(y) > f(x) - \varepsilon$) für alle $y \in U$. f heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *halbstetig auf X* , falls f in allen Punkten von X halbstetig ist. Zeigen Sie: Ist (X, τ) kompakt, so gibt es zu jeder nach oben (bzw. nach unten) halbstetigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = \sup f(X)$ (bzw. mit $f(x_0) = \inf f(X)$).

Die folgende Aufgabe zeigt, daß in Satz 4.22 auf die Voraussetzung der Separiertheit nicht verzichtet werden kann.

4.10. AUFGABE. Sei $X = [0, 1]$ versehen mit der Topologie

$$\tau := \{\emptyset, X\} \cup \{[0, 1) \setminus A ; A \text{ ist abzählbare Teilmenge von } X\}$$

Zeigen Sie:

- (a) (X, τ) ist kompakt.
- (b) Die in (X, τ) offene Menge $G := [0, 1)$ enthält für kein $x \in [0, 1)$ eine kompakte Umgebung von x .

4.11. AUFGABE. Sei $X = [0, 1]$ versehen mit der Topologie

$$\tau := \{\emptyset, X\} \cup \{[0, 1) \setminus A ; A \text{ ist abzählbare Teilmenge von } X\}$$

Zeigen Sie:

- (a) (X, τ) ist kompakt.
- (b) Die in (X, τ) offene Menge $G := [0, 1)$ enthält für kein $x \in G$ eine kompakte Umgebung von x .