Funktionentheorie 2

Ernst Albrecht

Vorlesung im Wintersemester 2008/09

Universität des Saarlandes
Saarbrücken

Stand: 26. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Die Γ–Funktion

1. Geschichte der Γ–Funktion

Anhand der Geschichte der Gammafunktion kann man in besonderer Weise die Entwicklung der Analysis in den letzten 250 Jahren verfolgen und erkennen. Mathematische Begriffe, wie zum Beispiel der der Gammafunktion, sind keine starren Objekte. Sie erfahren häufig mannigfaltige Veränderungen. Sie werden angepaßt, präzisiert, erweitert, charakterisiert, verallgemeinert und gewinnen oder verlieren im Laufe der Zeit an Bedeutung.

1.1. Problemstellung und Vorgeschichte. Wenn man die Folge $(s_n)_{n=1}^\infty$ betrachtet mit

$$s_1 := 1, \quad s_2 := 1+2, \quad s_3 := 1+2+3, \ldots, \quad s_n := 1+2+\cdots+n, \tag{1.1}$$

für die $s_{n+1} = s_n + n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so sieht man mit einem elementaren Induktionsbeweis

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.2}$$

Dies ist für die Berechnung von s_n bei großen $n \in \mathbb{N}$ sehr nützlich. Die rechte Seite in (1.2) ist nun für alle reellen Zahlen $n \in \mathbb{R}$, ja sogar für alle alle komplexen Zahlen definiert, so daß wir z.B.

$$s_{1/2} = \frac{3}{8} \quad \text{und } s_i := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

bilden können.

Interpolationsprobleme traten im siebzehnten und beginnenden achtzehnten Jahrhundert häufiger auf: Interpolationspolynome waren in England intensiv studiert worden, schon wegen ihrer praktischen Bedeutung z.B. beim Umgang mit Tafeln.

Isaac Newton (1643-1727) führte 1676 die Definitionen

$$a^0 := 1, \quad a^{n/m} := \sqrt[m]{a^n}, \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n},$$

ein, wodurch der Ausdruck a^n einen Sinn, nicht nur für natürliche Zahlen, sondern für alle rationalen Zahlen erhielt.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) betrachtete (während seiner Zeit als Leiter der Wolfenbütteler Bibliothek) höhere Ableitungen, für die er die Notation d^n einführte, und stellte fest, daß sich dieser Kalkül ähnlich wie die Potenzbildung verhält. In Briefen an Johann 1 Bernoulli[1] und an Guillaume François Antoine de l'Hospital[2] (1661-1704) demonstrierte er dies mit der nach ihm benannten Leibnizregel:

$$d^n(xy) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} d^j x \, d^{n-j} y \text{ in Analogie zu } (x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

[1] Briefe vom 6/16 Mai und 20/30 Oktober 1695 in [**69**].

[2] Brief vom 30. September 1695 in [**68**].

Er identifizierte d^{-1} mit $\int$ und d^{-n} mit dem iterierten Integral und versuchte[3] dem Ausdruck d^n für alle reellen Zahlen n einen Sinn zu geben, ein Problem, welches erst weit über 100 Jahre später zufriedenstellend gelöst wurde. In dem Brief an de l'Hospital schreibt er

> *"Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des consequences bien utiles de ces paradoxes,car il n'y a guere de paradoxes sans utilité."*

Die Entwicklung des fraktionalen Differential– und Integralkalküls im 19. und 20. Jahrhundert hat ihm recht gegeben.

Ersetzt man in (1.1) die Addition "+" durch die Multiplikation "·", so ist nicht so ohne weiteres klar, was eine analog zu (1.2) sinnvolle Darstellung für die Zahlen

$$1! := 1, \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots n \quad \text{mit } (n+1)! := (n+1) \cdot n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

sein könnte und in welcher Weise man z.B. dem Ausdruck $\left(\frac{1}{2}\right)!$ einen Sinn geben könnte.

John Wallis (1616-1703) war ursprünglich Kaplan und als Mathematiker weitgehend ein Autodidakt. Er war ein hervorragender und erfolgreicher Kryptoanalytiker (während des Bürgerkriegs auf Seiten der Republikaner) und war einer der Mitbegründer der *Royal Society of London*. 1649 erhielt er den Savilian-Lehrstuhl in Oxford. Seine mathematischen Arbeiten beeinflußten viele Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts, unter ihnen insbesondere auch Isaac Newton. In seinem mathematischen Hauptwerk *Arithmetica infinitorum*, Oxford 1656, behandelte er in dem letzten Teil das Problem der Quadratur des Kreises. Nach [**12, 25, 99**] berechnete er für $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$ die Ausdrücke (in heutiger Notation)

$$f(p,q) = \frac{1}{\int_0^1 (1 - x^{1/p})^q \, dx} = \frac{(p+q)}{p!q!}\,. \tag{1.3}$$

Interessiert war er natürlich besonders an dem Wert

$$f\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2} \, dx} = \frac{4}{\pi}.$$

Nach einigen bemerkenswerten aber nicht rigorosen Schlüssen kam er zu der nach ihm benannten Produktdarstellung[4]

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots.$$

Zusammen mit (1.3) suggeriert dies den Wert

$$\Big(\frac{1}{2}\Big)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Der Schotte James Sterling (1692-1770) versuchte es mit Newton-Interpolation. Da es sich um unendlich viele Interpolationspunkte handelte, kam er auf eine unendliche Interpolationsreihe

$$f_0 + f_1(x-1) + f_2(x-1)(x-2) + f_3(x-1)(x-2)(x-3) + \ldots,$$

die aber nicht konvergent war. Er daher schlug vor, statt dessen $\log n!$ zu interpolieren. Die Konvergenz der entsprechenden Interpolationsreihe wurde erst 1900 von Charles Hermite (1822-1901) gezeigt. Stirling hätte mit seinen damaligen Mitteln einen entsprechenden

---

[3] Briefe an Johann 1 Bernoulli (vom 28. Dezember 1695 in [**69**]), de l'Hospital (vom 30 September 1695 in [**68**]) und Wallis (vom 28. Mai 1697 in [**70**]).

[4] Wallis verwendete ein Quadrat □ zur Abkürzung von $\frac{4}{\pi}$. Die Bezeichnung π für das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises wurde von William Jones (1675–1749) in seinem Buch *Synopsis Palmariorum Mathesos: or a New Introduction to Mathematcs*, London 1706, verwendet, setzte sich aber zunächst nicht durch.

Konvergenzbeweis auch gar nicht führen können. Man muß bedenken, daß zu seiner Zeit der Begriff der Konvergenz noch nicht ausreichend präzisiert worden war.

Der in England lebende, gebürtige Franzose Abraham de Moivre (1667-1754) (insbesondere auch für seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt) und James Stirling hatten auch Approximationen von Binomialkoeffizienten und $\log n!$ für große $n \in \mathbb{N}$ erhalten.

1.2. Die Eulersche Einführung der Gammafunktion. Nach seiner Rückkehr von einer ausgedehnten Reise zu mehreren europäischen Höfen, an der er inkognito teilgenommen hatte, begann Zar Peter I. (1672-1725) im Jahr 1698 mit umfangreichen Reformen in Rußland mit u.a. der Einführung westlicher Kleider- und Barttracht, Schaffung neuer Behörden und Abschaffung der alten Zeitrechnung. In diesem Rahmen wurde, wie der russische Mathematikhistoriker Juschkewitsch in [**57**] schildert auch der endgültige Übergang von der damals in Rußland (wie im gesamtem byzantinischen kulturellen Einflußbereich) noch weithin üblichen alphabetischen Zahlenschreibweise zur positionellen Dezimaldarstellung mit den indo-arabischen Ziffern vollzogen. Noch 1682 erschien eine Multiplikationstafel bis 100×100 unter dem Titel *Bequemes Rechnen, mit dessen Hilfe jeder kaufende oder verkaufende Mann sehr bequem die Anzahl aller Dinge aufsuchen kann* in der alphabetischen Zahlenschreibweise. Erst 1714 wurde diese Tabelle in Petersburg unter Verwendung der neuen Zahlenschreibweise neu herausgegeben.

Am 2. Februar 1724 unterzeichnete Zar Peter I. einen Erlaß zur Gründung einer Akademie, die er zwar selbst nicht mehr erlebte, die aber von seiner Witwe Katharina I. in seinem Sinne vollzogen wurde. Angeregt zu dieser Gründung war er besonders durch Gottfried Wilhelm Leibniz, der den Zar dreimal zwischen 1711 und 1716 getroffen hatte und 1712 zum russischen Geheimen Justizrat ernannt wurde (mit einem Jahresgehalt von 1000 Talern).

Die hervorragendsten Wissenschaftler Europas wurden zur Mitarbeit an der neuen Akademie eingeladen. Johann I. Bernoulli (nach dem Tod von Leibniz im Jahr 1716 und Newtons altersbedingten Rückzugs von der Mathematik der berühmteste Mathematiker Europas) lehnte zwar eine Berufung ab, an seiner Stelle gingen seine beiden Söhne Niklaus II. (1695-1726) und Daniel Bernoulli (1700-1787) auf Empfehlung von Christian Wolff (der ebenfalls abgelehnt hatte) sowie ihr älterer Landsmann Jakob Herrmann 1725 nach Petersburg. Erster ständiger Sekretär der jungen Akademie war Christian Goldbach (1690-1764) von 1725 bis 1728. Sowohl Daniel Bernoulli als auch Christian Goldbach versuchten sich an dem Interpolationsproblem der Fakultätenfolge. Auf Empfehlung der Brüder Bernoulli und ihres Vaters mir Unterstützung von Goldbach erhielt 1727 der damals zwanzigjährige Leonhard Euler (15.04.1707-18.09.1783) eine Stelle als "élève" (später als Adjunkt bezeichnet).

Leonhard Euler[5] war Sohn des reformierten Pfarrers Paulus Euler. Nach Privatunterricht bei seinem Vater besucht Leonhard Euler die Lateinschule in Basel. Da die Mathematik an dieser Schule auf Antrag der Bürgerschaft als Lehrfach gestrichen war (trotz vehementer Proteste von Johann Bernoulli) erhielt Leonhard Euler daneben noch Privatunterricht in Mathematik von dem jungen Theologen Johannes Burckhardt (1691-1743). Mit dreizehn Jahren (damals durchaus normal) wird er an der Baseler Universität eingeschrieben. 1723 legte er sein Magisterexamen ab und immatrikulierte sich anschließend, dem Wunsch seines Vaters entsprechend an der theologischen Fakultät. Seine Interessen galten jedoch weiterhin besonders der Mathematik. Durch seinen Studienfreund Johann II.

[5]Fellmann und Thiele haben in [**35, 100**] ausführliche Biographien Eulers gegeben. Zu Eulers erster Petersburger Periode siehe auch die Arbeit [**18**] von Carlinger.

Bernoulli (1710-1790) erhielt er Zutritt zu dessen Vater Johann Bernoulli, dessen Vorlesungen er verfolgte. Sein Eifer und Erfolg erregte die besondere Aufmerksamkeit von Johann Bernoulli, der ihm schließlich Samstags privatissime weiterunterrichtete und förderte. Die beiden ersten Publikationen von Euler, die er im Alter von achtzehn bzw. neuzehn Jahren verfaßte (erschienen 1726 und 1727), schließen an Untersuchungen von Johann Bernoulli an. An einer 1726 öffentlich gestellten Preisfrage der Pariser Akademie über die günstigste Bemastung eines Schiffes beteiligte er sich mit einer Abhandlung, die ihm einen zweiten Preis einbrachte. Mit einer Dissertation über den Schall bewarb er sich 1727 auf eine vakante Physikprofessur in Basel, kam jedoch wohl auch wegen seiner Jugend nicht in die engere Auswahl.

So kam er also nach Petersburg, wo er durch Daniel Bernoulli und Christian Goldbach auf das Interpolationsproblem für die Fakultätenfolge aufmerksam gemacht wurde. Anfang 1728 ging Goldbach als Erzieher des jungen Zaren Peter II. mit dem Zarenhof nach Moskau. In einem Brief an Goldbach vom 6.10.1729 gibt Daniel Bernoulli (ohne Beweis) eine Darstellung für $m!$, $m \in \mathbb{N}$, die in moderner Notation wie folgt lautet:

$$m! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\left(n+\frac{m}{2}\right)^m}{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\dots\cdot(m+n)}\,.$$

Daniel Bernoulli nimmt nun an, daß nach einem *Stetigkeitsgesetz* sich die rechte Seite dieser Darstellung verwendet werden kann, um $m!$ für beliebige $n > 1$ zu approximieren. Probeweise approximiert er $3!$ mit $n = 16$ und erhält $3! \approx 6\frac{1}{204}$. Er berechnet auch eine Approximation von $(3/2)!$, wobei ihm jedoch ein Fehler unterlief, was er auch Goldbach in einem weiteren Brief vom 20.10.1729 mitteilt. Bernoulli hat seine Überlegungen mit Euler diskutiert.

Auch Euler und Goldbach hielten durch regen Briefwechsel ihren Kontakt aufrecht, der bis zum Tod von Christian Goldbach anhielt. In seinen ersten beiden Briefen an Goldbach kündigt Euler diesem seine Lösung des Interpolationsproblems für die Fakultäten an:

Im ersten Schreiben[6] vom 15. Oktober 1729 gibt er die Darstellung von $m!$ durch ein unendliches Produkt an:

$$m! = \frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\cdot\dots\,.$$

oder in heutiger Schreibweise

$$m! = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^{1-m}(k+1)^m}{k+m} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^m}{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n)}\,. \tag{1.4}$$

In der Tat folgt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $n > m$ bei $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\frac{n!(n+1)^m}{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n)} &= \frac{m!(n+1)^m}{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m)}\\ &= \frac{m!}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{m-1}{n+1}\right)} \to m!\end{aligned}$$

Er schreibt weiter, daß diese Darstellung es gestattet die Werte von $m!$ auch für Werte m anzugeben, die keine ganzen Zahlen sind. für $m = 1/2$, schreibt er, erhält man die Seite des Quadrates, deren Fläche mit der Fläche des Kreises mit dem Durchmesser 1

[6]Der Briefwechsel zwischen Euler und Goldbach und Eulers Arbeiten [**27, 30, 31**] sind zugänglich im Euler Archive unter `http://math.dartmouth.edu/~euler/`.

übereinstimmt[7], also $\frac{1}{2}! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \approx 0,8862269$. Damit kann man auch die Werte von $m!$ für $m = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, usw. bestimmen. Hiermit ist das Problem eigentlich schon vollständig gelöst, denn man kann zeigen[8], daß das unendliche Produkt für alle $m \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ konvergiert und somit eine komplexwertige Funktion auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ definiert, deren Werte auf $\mathbb{N}_0$ mit den entsprechenden Fakultäten übereinstimmen. Im Prinzip kann man die gesamte Theorie der Fakultätenfunktion auf diesem unendlichen Produkt aufbauen.

Euler geht jedoch weiter: In einem weiteren Brief an Goldbach vom 8. Januar 1730 gibt er auch eine Integraldarstellung

$$n! = \int_0^1 (-\log(x))^n dx \tag{1.5}$$

an. Auch diese Darstellung gestattet die Auswertung für nicht ganzzahlige Argumente.

Die eigentliche Herleitung dieser Aussagen präsentierte Euler im darauffolgenden Jahr vor der Petersburger Akademie in der Arbeit [**27**] *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, die aber ebenfalls keinen Konvergenzbeweis für die Produktdarstellung (1.4) enthält. Hier erkennen wir, wie Euler auf den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gekommen ist. In diesem Fall stimmt das unendliche Produkt in (1.4) nämlich überein mit

$$\sqrt{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdot\ldots}$$

wobei der Kehrwert des Produktes unter der Wurzel mit der Produktdarstellung von Wallis für $\frac{4}{\pi}$ übereinstimmt.

Zur Herleitung der Integraldarstellung geht Euler von dem Integral

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx$$

aus. Spezialfälle dieses Integrals waren auch von Wallis, Newton und Stirling betrachtet worden. Euler schreibt $(1-x)^n$ als binomische Reihe (diese war seit Newton bekannt) und integriert gliedweise:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^e(1-x)^n dx =& \frac{1}{e+1} - \frac{n}{1\cdot(e+2)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot(e+3)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(e+4)} + \ldots \\ =& \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{e+k+1}.\end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe natürlich ab und Euler erhält in diesem Fall in heutiger Schreibweise

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx = \frac{n!}{(e+1)\cdot(e+2)\cdot\cdots\cdot(e+n+1)}.$$

---

[7]Euler verwendet zu jener Zeit noch nicht den Buchstaben π für die Kreiszahl. Erst 1737 kommt er in der (1744 erschienenen) Arbeit [**28**] auf diese früher schon in England verwendete Bezeichnung zurück. Populär wurde der Gebrauch von π schließlich durch Eulers 1748 erschienenes Buch *Introductio in analysis infinitorum.*

[8]Gauß (1812) betrachtete die Darstellung

$$m! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^m}{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\cdots\cdot(m+n)}$$

und zeigte, daß dieser Grenzwert für alle $m \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ konvergiert. Offensichtlich existiert der Grenzwert der Eulerschen Definition genau dann, wenn der Grenzwert der Gaußschen Darstellung existiert, und die beiden Grenzwerte stimmen überein. Entsprechendes gilt auch für die Darstellung von Daniel Bernoulli und $m > 1$.

Nun macht Euler den Ansatz $e = f/g$ und erhält

$$\int_0^1 x^{f/g}(1-x)^n dx = \frac{g^{n+1}}{f+(n+1)g} \cdot \frac{n!}{(f+g)\cdot(f+2g)\cdot\dots\cdot(f+ng)} \tag{1.6}$$

und hieraus

$$\frac{n!}{(f+g)\cdot(f+2g)\cdot\dots\cdot(f+ng)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int_0^1 x^{f/g}(1-x)^n dx\,. \tag{1.7}$$

für $f = 1$, $g = 0$ erhält man auf der linken Seite nun $n!$ aber auf der rechten den unbestimmten Ausdruck

$$\int_0^1 \frac{x^{1/0}(1-x)^n}{0^{n+1}} dx\,.$$

Zur Berechnung des Grenzwertes auf der rechten Seite von (1.7) macht Euler daher in dem Integral die Variablensubstitution $x^{\frac{g}{f+g}}$ für x und erhält für die rechte Seite von (1.7)

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int_0^1 \frac{g}{f+g}(1-x^{g/(f+g)})^n dx\,.$$

Diesen Ausdruck kann man auch so schreiben

$$\frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}} \int_0^1 \Big(\frac{1-x^{g/(f+g)}}{g/(f+g)}\Big)^n dx\,. \tag{1.8}$$

Euler macht abermals den Versuch, $f = 1$ und $g = 0$ zu setzen, und bekommt den unbestimmten Ausdruck

$$\int_0^1 \Big(\frac{1-x^0}{0}\Big)^n dx.$$

Nach der Regel von de L'Hospital[9] berechnet er nun korrekt den Grenzwert von

$$\frac{1-x^z}{z}$$

für $z \to 0$ und schreibt

$$\frac{1-x^0}{0} = -\log x.$$

Dies setzt er ein und findet

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n dx.$$

Euler hat also beim Übergang zum Grenzwert für $g \to 0$ Integration und Grenzwertbildung vertauscht, was im vorliegenden Fall auch gerechtfertigt ist.

Daß die beiden Darstellungen (1.4) und (1.5) zum gleichen Ergebnis führen zeigt er nicht. Der Grund dafür, daß Euler seine erste Lösung nicht weiter verfolgte, mag daran gelegen haben, daß er diese Lösung nicht als eine *Funktion* verstanden hat. Unter einer Funktion einer variablen Größe verstand Euler (seinem Lehrer Johann I. Bernoulli folgend) einen analytischen Ausdruck der in irgendeiner Weise aus dieser variablen Größe und konstanten Größen zusammengesetzt ist. Zu den hierbei zugelassenen Operationen zählte Euler algebraische Operationen (wozu auch die Lösung algebraischer Gleichungen gehörte), transzendente Operationen, Exponential und logarithmische Funktionen sowie andere Operationen, wobei der Integralkalkül und die Integration von Differentialgleichungen eingeschlossen war[10].

[9] Euler nennt die Regel nicht bei diesem Namen. Vielleicht war ihm bekannt, daß Johann I. Bernoulli diese Regel l'Hospital in einem Brief vom 22.7.1694 mitgeteilt hatte.

[10] Hierzu und zur Entwicklung des Funktionsbegriffes bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts sei auf [**110**] verwiesen.

Inwieweit Bernoulli, Goldbach und Euler bei Ihren Bemühungen um die Interpolation der Fakultätenfolge durch das eingangs geschilderte Leibnizsche Problem der fraktionalen Differentiation motiviert waren, ist mir nicht bekannt. Ich nehme jedoch an, daß Daniel Bernoulli den Briefwechsel seines Vaters mit Leibniz und damit auch dieses Problem kannte. Jedenfalls geht Euler in seiner Arbeit auf diese Frage etwas ein. Es gilt ja für $0 \leq n \leq e$ aus $\mathbb{N}_0$ (in heutiger Schreibweise) mit der von ihm gewonnen Integraldarstellung der Fakultäten:

$$\frac{d^n z^e}{dz^n} = \frac{e!}{(e-n)!} z^{e-n} = z^{e-n} \frac{\int_0^1 (-\log x)^e dx}{\int_0^1 (-\log x)^{e-n} dx}.$$

wobei die rechte Seite nun für alle $n, e \geq 0$ mit $n \leq e$ definiert ist. Es liegt also nahe, für alle solchen n, e zu definieren

$$\frac{d^n z^e}{dz^n} := z^{e-n} \frac{\int_0^1 (-\log x)^e dx}{\int_0^1 (-\log x)^{e-n} dx}.$$

Als Beispiel behandelt Euler den Fall $n = 1/2$, $e = 1$ und erhält (in heutiger Notation):

$$\frac{d^{1/2} z}{dz^{1/2}} = \sqrt{z} \frac{\int_0^1 -\log x\, dx}{\int_0^1 (-\log x)^{1/2} dx} = 2\sqrt{\frac{z}{\pi}}.$$

In einer späteren Arbeit [**30**] aus dem Jahre 1769 gibt Euler auch die Darstellung

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

an, die man mit der Variablensubstitution $t = e^{-x}$ aus der ersten Integraldarstellung erhält. Aus beiden Integraldarstellungen folgt leicht die Funktionalgleichung

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!\,, \qquad n > 0.$$

Er erkannte auch, daß sich die Fakultätenfunktion auf $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ fortsetzen läßt und erhielt aus der Produktdarstellung die *Eulersche Reflexionsformel*:

$$x!(-x)! = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{k^2}{k^2 - x^2} = \frac{\pi x}{\sin \pi x}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\,,$$

wobei die letzte Gleichung aus der unendlichen Produktdarstellung für die Sinusfunktion folgt, die Euler im ersten Band seines berühmten Werkes *Introductio in analysis infinitorum* (1748) erhalten hatte.

In der erst nach seinem Tode veröffentlichte Arbeit [**32**], S. 433, leitet Euler die folgende interessante Multiplikationsformel her:

$$\prod_{k=1}^{n-1} (\frac{k}{n})! = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \sqrt{\frac{(2\pi)n - 1}{n}}\,. \tag{1.9}$$

1.3. Weitere Entwicklung im 19. Jahrhundert. Die heute übliche Bezeichnung Γ für die Gammafunktion, die im Argument um 1 verschobene Fakultätenfunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\,, \qquad x > 0,$$

wurde von Adrien Marie Legendre (1752–1833) im Jahre 1811 eingeführt. Dieser zeigte auch 1809 die nach ihm benannte Verdoppelungsformel

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big)$$

(die wir in Satz 1.11 beweisen werden) und führte umfangreiche Untersuchengen zu den Eulerschen Integralen erster Art

$$\left(\frac{p}{q}\right) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx$$

durch[11]. Ferner bewies er folgende schnell konvergente Reihendarstellung für $\log x!$:

$$\log x! = \frac{1}{2}\log\frac{\pi x}{\sin \pi x} + = \frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x} + (1-\gamma)x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-S_{2k+1}}{2k+1}x^{2k+1}.$$

Hierbei ist γ die Euler-Mascheroni-Konstante und $S_k := \sum_{j=1}^{\infty} j^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Die Bezeichnung Betafunktion und

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

geht auf Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) zurück. Die in Übungsaufgabe 1.7 zu zeigende Beziehung

$$B(x,y) = \frac{(x-1)!\cdot(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

war bereits Euler bekannt [**31**]. Eine einfache Variablentransformation zeigt:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\cdot B\left(\frac{p}{n},\frac{q}{n}\right), \qquad p,q>0,$$

Viele der von Euler, Legendre und Binet durch umfangreiche Rechnungen gefundenen Aussagen über die Eulerschen Integrale erster Art lassen sich hiermit unmittelbar auf einfache Eigenschaften der Gammafunktion zurückführen.

Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat sich anscheinend Ende 1796 ebenfalls mit dem Leibnizschen Problem der gebrochenen Ableitung befaßt; zumindest deutet eine Eintragung vom 23. Dezember 1796 in seinem mathematischen Tagebuch [**48, 49**] darauf hin. Weiterführende Untersuchungen hierzu sind jedoch nicht erhalten. Um diese Zeit begann er auch mit Untersuchungen zu den Eulerschen Integralen erster Art. Er verwendete die Bezeichnung Πz für die Fakultätenfunktion, konnte sich damit aber nicht durchsetzen. Seine grundlegende, 1813 erschienene Arbeit [**45**] über die hypergeometrische Funktion

Disqusitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+etc.$$

Pars prior[12]

enthält auch seinen Zugang zur Fakultätenfunktion.

Gauß hat selbst eine "Anzeige" (also eine Art Autorenreferat) [**47**] in den Göttingischen gelehrten Anzeigen hierzu publiziert, in der er einen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse gibt[13]. Der die Gammafunktion betreffende Teil dieser Anzeige sei hier wiedergegeben:

> Bei weitem den grössten Theil der Abhandlung nimmt der *dritte* Abschnitt ein, in welchem von dem Werthe der Reihe gehandelt wird, wenn man das vierte Element [also x] =1 setzt. Nachdem zuvörderst mit geometrischer Schärfe bewiesen, dass die Reihe für $x = 1$ nur dann zu einer endlichen Summe convergire, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ eine positive Grösse

[11] Die Bezeichnung $\left(\frac{p}{q}\right)$ wurde von Euler schon in [**31**] verwendet.

[12] Ein zweiter Teil [**46**] wurde erst in seinen gesammelten Werken posthum publiziert.

[13] Diese Anzeige ist zusammen mit weiteren solcher Anzeigen auch in [**91**] abgedruckt.

ist, führt der Verf. diese Summe oder $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ auf den Ausdruck $\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}$ zurück, wo die Charakteristik Π eine eigene Art transszendenter Functionen andeutet, deren Erzeugung der Verf. auf ein unendliches Product gründet. Diese in der ganzen Analyse höchst wichtige Function ist im Grunde nichts anderes als EULERS inexplicable Function $\Pi z = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot z$ allein *diese* Erzeugungsart ist, nach des Verf. Urtheil durchaus nicht statthaft, da sie nur für ganze positive Werthe einen klaren Sinn hat. Die vom Verf. gewählte Begründungsart ist allgemein anwendbar, und gibt selbst bei imaginären Werthen von z einen ebenso klaren Sinn, wie bei reellen und man läuft dabei durchaus keine Gefahr auf solche Paradoxen und Widersprüche, wie ehedem Hr. Kramp[14] bei seinen numerischen Facultäten, die sich wie man leicht zeigen kann, auf obige Function zurückführen lassen, aber zur Aufnahme in die Analyse weniger geeignet scheinen, als diese, da jene von drei Grössen abhängig sind, diese nur von einer abhngt, und doch als eben so allgemein betrachtet werden muss. Der Verf. wünscht dieser transszendenten Function Πz in der Analyse das Bürgerrecht gegeben zu sehen, wozu vielleicht die Wahl eines eigenen Namens für dieselbe am beförderlichsten sein würde: Das Recht dazu mag demjenigen vorbehalten bleiben, der die wichtigsten Entdeckungen in der Theorie dieser den Anstrengungen der Geometer sehr würdigen Function machen wird. Hier ist von dem Verf. bereits eine bedeutende Anzahl merkwürdiger, sie betreffender, Theoreme zusammengestellt, wovon ein Theil als neu zu betrachten ist. Der Raum verstattet uns nicht, in das Detail derselben hier einzugehen: nur das eine heben wir davon aus, das der Werth des Integrals $\int x^{\lambda-1}(1-x^{\mu})^{\gamma} dx$ von $x = 0$ bis $x = 1$ leicht auf die Function Π zurückgeführt werden kann, und alle die von EULER[15] für dergleichen Integrale zum Theil mühsam gefundenen Relationen sich mit grösster Leichtigkeit aus den allgemeinen Eigenschaften jener Functionen ableiten lassen, so wie umgekehrt allemal Πz, wenn z eine Rationalgrösse ist, sich durch einige solche bestimmte Integrale darstellen lässt.

Nicht weniger merkwürdig ist die aus der Differentiation von Πz entspringende, gleichfalls transszendente, Function, oder vielmehr

$$\frac{d \log \Pi z}{dz} = \frac{d\Pi z}{\Pi z \cdot dz}$$

welche der Verfasser mit Ψz bezeichnet hat, und die gleichfalls eine besondere *Benennung* verdiente[16]. Von den zahlreichen merkwürdigen Eigenschaften dieser Function, welche in der Abhandlung aufgestellt sind, führen wir hier nur die Eine an, dass allgemein $\Psi z - \Psi 0$, wenn z eine rationale Grösse ist, auf Logarithmen und Kreisfunctionen zurückgeführt werden kann; $\Psi 0$ selbst aber ist die bekannte, von EULER und Andern untersuchte, Zahl

$$0.5772156649\ldots$$

negativ genommen, welche der Verfasser hier, nach einer von ihm selbst geführten Rechnung, auf 23 Decimalen mittheilt, wovon die letzten von

[14] Wir werden im folgenden Abschnitt auf die Hintergründe dieser Polemik eingehen.

[15] Übrigens auch die von Legendre und Binet!

[16] Heute wird meist die im Argument um 1 verschobene Funktion $\Psi := \Gamma'/\Gamma$, die auch *Digammafunktion* genannt wird, verwendet.

MASCHERONI'S Bestimmung etwas abweichen. Uebrigens hängen sowohl Πz, als auch Ψz, mit mehreren merkwürdigen Integralen für bestimmte Werthe der veränderlichen Grösse zusammen.

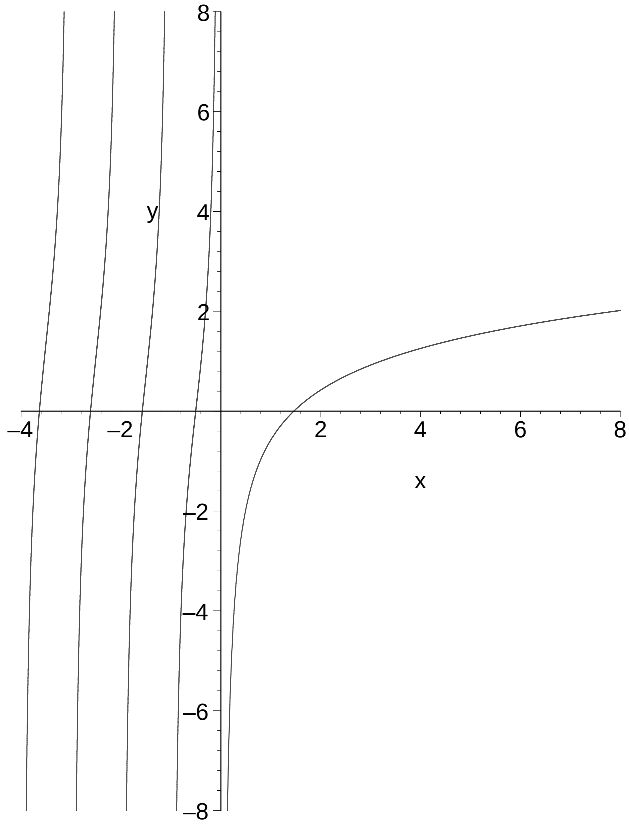

ABBILDUNG 1. Der Verlauf der Digammafunktion über dem reellen Intervall $[-4, 8]$

Diesem dritten Abschnitte ist noch eine unter der Aufsicht des Professors GAUSS von Hrn. NICOLAI mit grösster Sorgfalt berechnete Tafel für $\log \Pi z$ und für Ψz beigefügt, worin das Argument z durch alle einzelnen Hunderttheile von 0 bis 1 fortschreitet; aus der Theorie dieser Functionen ist klar, dass man auf diese Werte von z alle andere leicht zurückführen kann[17]

[17]Während Gauß und Nicolai bei der Darstellung der ψ–Funktion den natürlichen Logarithmus verwenden, benutzen sie bei der Darstellung von $\log \Pi z$ den Logarithmus zur Basis 10. Genauer: Außer für $z = 0$ und $z = 1$ sind in der Tabelle (ohne einen erklärenden Kommentar) unter der Überschrift $\log \Pi z$ statt der Werte für $\log \Pi z$ die Werte für $10 + \log_{10} \Pi z$ wiedergegeben. Die Rechnung ist bis auf 20 Dezimalstellen genau. Eine frühere numerische Tafel ist von Legendre bekannt. Er berechnete 1809 die Werte von $\log \Gamma(1 + x)$ auf dem kleineren Intervall $[0, 1/2]$ mit einer Schrittweite von $0,005$ auf 7 Dezimalstellen, 1817 auf $[0, 1]$ mit einer Schrittweite von $0,001$ und 7 Dezimalstellen und schließlich 1826 mit 12 Dezimalstellen. Christian Kramp berichtet in dem ersten Teil von [**61**] von einer auf 10 Dezimalen genau berechneten Tafel von $\frac{\log_{10} \Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$ (dort in anderer Schreibweise) durch Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) für das Intervall $[1, 2]$ mit einer Schrittweite von $0,01$ und rechnet diese auf $\log_{10} \Pi(x)$ im Intervall $[0, 1]$ um und gibt die Tafel in ähnlicher Weise wieder (also in der Form $10 + \log_{10} \Pi(x)$) wie bei Gauß und Nicolai. Bessels Tafel ist in [**13**] in der üblichen Darstellung wiedergegeben. In einer Anmerkung zur zweiten Abhandlung über numerischen Fakultäten von Kramp in den Annales de Gergonne, schreibt der Herausgeber Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) treffend zu den Tafeln von Legendre, Bessel und Gauß: *"Voilà donc trois géomètres de premier ordre qui, faute de moyens rapide de communication, ont consommé un temps précieux en de pénibles calculs, pour parvenir aux mêmes résultats."*

Außer auf die von Gauß selbst erwähnten Resultate sei noch auf seine Multiplikationsformel hingewiesen (hier für die Gammafunktion wiedergegeben):

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma\big(z+\frac{1}{n}\big)\Gamma\big(z+\frac{2}{n}\big)\cdot\dots\cdot\Gamma\big(z+\frac{n-1}{n}\big)$$

Diese Multiplikationsformel ist eine Verallgemeinerung der oben angegebenen Verdoppelungsformel von Legendre. Bei Gauß (Formel [57] in [**45**]) hat sie folgende Form:

$$\frac{n^{nz}\Pi z\cdot\Pi\big(z-\frac{1}{n}\big)\cdot\dots\cdot\Pi\big(z-\frac{n-1}{n}\big)}{\Pi nz} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}.$$

Im Spezialfall $z = 1$ ergibt sich die Eulersche Multiplikationsformel (1.9).

Die Produktdarstellungen der Form

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z\prod_{j=1}^{\infty}\Big[\big(1+\frac{z}{j}\big)e^{-\frac{z}{j}}\Big]} = \frac{1}{z\prod_{j=1}^{\infty}\Big[\big(1+\frac{z}{j}\big)\cdot\big(\frac{j+1}{j}\big)^{z}\Big]}$$

gehen auf Oscar Xavier Schlömilch (1823–1901), 1844, 1848, Newman, 1848, und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897), 1856 zurück. Wir werden auf den Weierstraßschen Zugang hierzu im kommenden Abschnitt näher eingehen.

Viele transzendente Funktionen, wie z.B. die trigonometrischen Funktionen, sind zwar nicht algebraisch, sind aber Lösungen einer Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten. 1887 bewies Otto Ludwig Hölder (1859–1937) in [**53**] daß dies für die Γ–Funktion nicht zutrifft.

für einen vollständigeren Überblick über Untersuchungen zur Γ–Funktion im 19. Jahrhundert verweisen wir auf [**78**].

Alle die bisher angegebenen Eigenschaften der von Euler gefundenen die Fakultäten interpolierenden Funktion $z \mapsto \Gamma(z+1)$ erklären noch nicht, warum diese Funktion die "*richtige*" Funktion ist. Auch die Funktion

$$z \mapsto \Gamma(z+1)\cos(2\pi z)$$

hat diese Eigenschaft und ist ebenfalls eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit Polen nur in den negativen ganzen Zahlen. Noch schöner ist die folgende 1894 von Hadamard angegebene, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Lösung des Interpolationsproblems:

$$H(z) := \frac{1}{\Gamma(-z)}\cdot\frac{d}{dz}\bigg(\frac{\Gamma\big(-\frac{z}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{1-z}{2}\big)}\bigg).$$

Es ergab sich also das Problem einer vernünftigen Charakterisierung Der Γ–Funktion. Hierauf soll in den beiden folgenden Abschnitten eingegangen werden.

1.4. Analytische Fakultäten. Analytische Fakultäten und die Weierstraßsche Charakterisierung der Γ–Funktion

Der Verlauf der Entwicklung in der mathematischen Forschung ist nicht immer geradlinig. Häufig verrennen sich einzelne Mathematiker oder gar ganze Gruppen in einer Richtung und produzieren dann uninteressante, nicht sehr tief liegende oder gar falsche Ergebnisse. Die Aufgabe der Herausgeber mathematischer Schriften ist es, die Publikation solcher Arbeiten zu verhindern. Dies gelingt jedoch nicht immer, zumal wenn der Herausgeber selbst Anhänger einer solchen Richtung ist. Daß dies nicht unbedingt zum Schaden für die weitere Entwicklung sein muß, zeigt der Fall der von Christian Kramp (1760–1826) initiierten Theorie der numerischen (oder analytischen) Fakultäten.

Kramp[18], den Gauß in seiner Anzeige zu den "Disqusitiones" so heftig kritisiert hatte, hatte in seiner Vaterstadt Medizin studiert und 1786 promoviert. Er praktizierte als Arzt zunächst in Straßburg und Paris, wurde 1794 als Physikus und Lehrer der Geburtshilfe für das Fürstentum Zweibrücken nach Meisenheim versetzt. Er publizierte ein Lehrbuch der Geburtshilfe und 1787 im Leipziger Magazin eine Arbeit *Versuch, die Sterblichkeit durch einfache Gleichungen zu bestimmen*. Schließlich wandte er sich mehr der Physik, Chemie und der Mathematik zu. Nach einer Zeit als Professor an der Zentralschule in Köln war er ab 1809 ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität in Straßburg und Korrespondent der Pariser Akademie. Er arbeitete unter anderem über Kettenbrüche, Näherungslösungen von Gleichungen, verfaßte eine zweibändige Geschichte der Aerostatik, arbeitete über Kristallphysik und bestimmte den Schwerpunkt des Sphärischen Dreiecks. Er war wohl ein Anhänger der kombinatorischen Schule von Karl Friedrich Hindenburg (1741–1808), jedenfalls sind zahlreiche Briefe und Originalarbeiten von ihm in Hindenburgs *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* und in dessen *Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen erschienen*. Auch in den *Annales de Mathématiques pures et appliquées (Annales de Gergonne*[19]*)* sind 30 Arbeiten und Briefe von ihm enthalten.

Angeregt durch eine Arbeit ([**104**] von 1772) von Alexandre–Théophile Vandermonde (1736–1796) entwickelt Kramp in einem Kapitel seines 1798 erschienenen Hauptwerkes [**59**] *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres* eine allgemeine Theorie der von ihm sogenannten *numerischen Fakultäten*[20] *(facultés numériques)*. Diese Theorie erregt rasch große Aufmerksamkeit. So geht etwa Sylvestre François Lacroix in dem 1800 erschienen Ergänzungsband [**65**] zu seinem sehr populären und in mehreren Auflagen erschienenen *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, in dem auch die Vandermondesche Theorie abgehandelt wird bereits kurz auf diese Begriffsbildung ein.

Kramp geht aus von Ausdrücken

$$a^{m|r} := a(a+r)(a+2r)\cdot\dots\cdot(a+(m-1)r)$$

wobei a, r beliebig waren und zunächst $m \in \mathbb{N}$ und erhält folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} a^{m+n|r} &= a^{m|r}(a+mr)^{n|r}, && (1.10)\\ a^{1|r} &= a, && (1.11)\\ (ka)^{m|kr} &= k^r a^{m|r}, && (1.12)\\ a^{m|r} &= (a+(m-1)r)^{m|-r}, && (1.13)\\ a^{m|0} &= a^m. && (1.14) \end{aligned}$$

Die ersten drei dieser Rechenregeln sind den Potenzrechenregeln

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad a^1 = a, \quad (ka)^m = k^m a^m$$

so ähnlich, daß Kramp im ekzessiven (wie er später in [**61**] selbst vermerkt) Vertrauen auf *das Gesetz der Stetigkeit* glaubte, die Existenz einer Funktion $a^{m|r}$ (in den drei Veränderlichen a, r, m) annehmen zu können, für die diese fünf Beziehungen auch für beliebige Werte von m gültig bleiben. Im Spezialfall $a = 0$, $r = 1$ hätte man dann auch wieder eine Lösung des von Euler behandelten Interpolationsproblems. Er nannte a die Basis, m den Exponenten und r die Differenz. Die weiteren Rechnungen von Kramp führten jedoch zu offensichtlichen Widersprüchen.

[18] Die folgenden Angaben zu Leben und Werk von Christian Kramp folgen dem Artikel von Günther in der Allgemeinen Deutschen Biographie.

[19] Nach dem Herausgeber Joseph Diaz Gergonne (1771–1859).

[20] daher rührt auch die heutige Bezeichnung *n Fakultät* für $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Gegen diese Fehler und die komplizierte Vorgehensweise von Kramp polemisiert Gauß in [**45, 47**]. In Abschnitt 22 seiner Arbeit [**45**] stellt er fest:

$$a^{b|c} = \frac{c^b \Pi\left(\frac{a}{c} + b - 1\right)}{\Pi\left(\frac{a}{c} - 1\right)}. \tag{1.15}$$

Dies ist jedenfalls richtig für $0 \neq c$ und $b \in \mathbb{N}$. Gauß hat damit eine Funktion gefunden, die die Folge $(a^{m|r})_{m=1}^{\infty}$ interpoliert und sich in einfacher Weise durch die nur von einer Variablen abhängige Funktion Π ausdrücken läßt.

In zwei Briefen[21] vom 10. März 1811 und vom 16. Oktober 1811, also zu der Zeit, als Gauß an den Disquisitiones arbeitete, schrieb Bessel ihm von eigenen Untersuchungen zu den "berüchtigten" Krampschen Fakultäten. Diese sind 1812 im *Königsberger Archiv für Naturwissenschaften und Mathematik* ([**13**]) erschienen. Er schreibt darin

> Die natürlichsten und fruchtbarsten Bedingungen, die man zur Erfindung des allgemeinen Werthes von $a^{m|r}$ benutzen kann liegen in den Sätzen (1) und (2)[22]; bestimmt man die Bedeutung der Fakultät durch diese, so wird man dadurch eine Function erhalten, welche nicht nur (1) und (2) sondern auch allen Relationen entspricht, die man aus (1) und (2) herleiten kann: also eine Facultät im Sinne KRAMP'S.

Bessel fordert noch zusätzlich die für $m \in \mathbb{N}$ offensichtlich erfüllte Bedingung

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{a^{m|r}}{a^m} = 1$$

und verwendet auch (1.11). Unter diesen Bedingungen kommt er schließlich zu einer Darstellung

$$a^{m|r} = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} (nr)^m \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{a+\nu r}{a+(m+\nu)r}\right), & \text{wenn } r > 0 \\ \lim_{n\to\infty} (nr)^m \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{a+(m-\nu)r}{a-\nu r}\right), & \text{wenn } r < 0 \end{cases}$$

Damit hat er eine für alle reellen m definierte Interpolation von $(a^{m|r})_{m=1}^{\infty}$ gefunden, die den Bedingungen (1.10) und (1.13) genügt. für positives x gilt dann

$$1^{x|1} = \Pi(x) = \Gamma(x+1).$$

Kramp kannte die Resultate von Bessel und veröffentlichte umgehend eine Serie von drei weiteren Abhandlungen [**61**] zur Theorie der numerischen Fakultäten in den *Annales de Gergonne*. In diesen Arbeiten schreibt Kramp wie schon zuvor in [**60**] $x!$ für den Wert $\Pi(x)$ (bei Gauß) bzw. $\Gamma(x+1)$ (bei Legendre). Alle drei Bezeichnungen werden auch noch heute verwendet[23] . In der ersten der drei Abhandlungen entdeckt er auch die einfache Formel von Gauß (1.15). In der Einleitung zur zweiten Abhandlung ([**61**], S. 114) ändert er seine Namensgebung zu den bisherigen numerischen Fakultäten ab mit den Worten:

> J'ai prouvé, dans un premier mémoire, que toute faculté était réductible à la forme très-simple $1^{y|1}$ ou $y!$; mais comme les facultés de cette dernière forme ne dispensent pas de la considération des autres; afin de faire correspondre une différence de dénomination à une différence de symboles, j'appellerai, a l'avenir, *Factorielles* les fonctions de la forme générale $a^{y|r}$, et je réserverai exclusivement le nom de *Facultés numériques*, ou

[21]In einem Antwortschreiben vom 21. November 1811 berichtet Gauss seinerseits von seinen Untersuchungen, die dann in den Disquisitiones [**45**] erschienen, und äußert sich zu Kramps Fakultäten in ähnlicher Weise wie in der Kurzanzeige [**47**] zu den Disquisitiones.

[22]Diese entsprechen in unserer Numerierung den Formeln (1.10) und (1.13).

[23]Euler schrieb hierfür einfach $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot x$ (was von Gauß später kritisiert wurde) oder auch $[x]$ (wie z.B. in [**31**]).

> simplement de *Facultés*, pour désigner les fonctions de la forme $1^{y|1}$ ou $y!$, auquelles se réduisent les premières, dans le cas particulier où l'on a $a = 1$ et $r = 1$.

Mit diesen Worten scheint er mir zugleich auch auf die Polemik von Gauß einzugehen.

Man sollte nun meinen, daß nach den klaren Worten von Gauß die Theorie der numerischen Fakultäten nicht weiter verfolgt würde. Dies war jedoch nicht der Fall: In den Jahren von 1823 bis 1854 erschienen Arbeiten und Bücher [**21, 22, 23**] von August Leopold Crelle (1780–1855), [**50**] von Christoph Gudermann (1798–1852), [**76**] von Anton Müller (1799–1860), [**83, 84, 85**] von Martin Ohm (1792–1872, Bruder des Physikers und Mathematikers Georg Simon Ohm, 1789–1854) und [**79, 80, 81**] von Ludwig Oettinger (1797–1869).

1823 erschien das Buch [**21**] des Bautechnikers und Mathematikers August Leopold Crelle und 1831 folgt eine umfangreiche Abhandlung [**22**] in dem von ihm in dem von ihm 1826 begründeten und während der ersten dreißig Jahre von ihm herausgegebenen Journal für die reine und angewandte Mathematik[24] (bis in die Gegenwart von Mathematikern gerne als Crelle Journal bezeichnet). Crelle war im preußischen Staatsdienst zum geheimen Oberbaurat und Mitglied der Oberbaudirektion aufgestiegen. Unter anderem wurde die Berlin–Potsdamer Eisenbahn unter seiner Leitung gebaut.

Auch Crelle geht von den drei Gleichungen (1.10) – (1.12) aus: Eine analytische Fakultät ist für ihn eine Funktion f in drei Variablen (der Basis u, der Differenz x und dem Exponenten y), die die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

$$f(u,x,y+k) = f(u,x,y)\cdot f(u+yx,x,k), \tag{1.16}$$

$$f(ku,kx,y) = k^y f(u,x,y), \tag{1.17}$$

$$f(u,x,1) = u. \tag{1.18}$$

Er findet die Funktionsschreibweise für rechnerische Zwecke unbequem und führt die Notation $(u,x)^y$ für $f(u,x,y)$ ein. Aus den Bedingungen (1.16) – (1.18) leitet er anschließend alle weiteren Eigenschaften her.

Im zweiten Band [**82**] seines neunbändigen Werkes *Versuch eines vollkommen consequenten Systemes der Mathematik* kritisiert Martin Ohm[25] Crelles Buch [**21**] auf das heftigste. Unter anderem behauptet er, daß eine solche analytische Fakultät nicht existieren könne, und spricht davon, daß Crelle *nur allgemeine Formeln auf allgemeine Formeln gehäuft hat, welche daher als solche grösstenteils für todtgeborene gehalten werden müssen*[26].

Karl Weierstraß (1815–1897) studierte zunächst ab 1834 vier Jahre Kameralistik (Rechts- und Verwaltungswissenschaften) in Bonn, brach das Studium aber ohne einen Abschluß zu machen ab. Während dieser Zeit hat er sich schon im Selbststudium mit Werken von Laplace und Jacobi beschäftgt und die Mitschrift einer Vorlesung über Modulfunktionen von Christoph Gudermann (1798–1852) gelesen. Um doch noch zu einem Studienabschluß zu kommen besuchte Weierstraß ab Mai 1839 die Akademischen Lehranstalt in Münster, an der Gudermann lehrte, eine Ausbildungsstätte für katholische Geistliche und

[24] Daneben gab er von 1829 bis 1851 dreißig Bände des Journals für die Baukunst heraus.

[25] Zur Biographie Martin Ohms siehe [**56**].

[26] Ein ausführlicheres Zitat der Ohmschen Kritik ist in [**107**] wiedergegeben. In [**41**] wird von einem Brief Abels an Hansteen während Abels Aufenthalts in Berlin berichtet, in dem Abel schreibt, daß es früher wöchentliche Treffen von Mathematikern in Crelles Haus gegeben habe, die Crelle aber aufgeben mußte wegen eines gewissen Ohm, mit dem niemand wegen dessen schrecklicher Arroganz auskommen konnte. Zu jener Zeit war Ohm außerorrdentlicher Professor an der Universität Berlin, ab 1839 dann ordentlicher Professor.

für Gymnasiallehrer, die das Promotions– und Habilitationsrecht nur für die Theologische Fakultät besaß. 1842, nach erfolgreichem Abschluß, wurde er Lehrer am Katholischen Progymnasium in Deutsch–Krone (Westpreußen) und von 1848 bis 1855 unterrichtete er am Katholischen Gymnasium in Braunsberg (Ostpreußen). Er unterrichtete die Fächer Mathematik, Physik, Deutsch, Botanik, Geographie, Geschichte, Turnen und Schönschreiben. Seine Examensarbeit *Über die Entwicklung der Modular–Functionen* [**106**] hatte er bei seinem Lehrer Gudermann geschrieben, der zu dem Bereich der modularen Funktionen eine ganze Serie von Arbeiten [**51**] in Crelles Journal publizierte. Gudermann war wie andere ebenfalls von der Bewegung der "kombinatorischen Analysis" beeinflußt[27].

Wahrscheinlich war Weierstraß schon in seiner Münsteraner Zeit auf die Theorie der numerischen Fakultäten und die Kritik Ohms an dem Crelleschen Zugang zu dieser Theorie aufmerksam geworden. Er stellte fest, daß Ohm noch eine weitere Beziehung zugrundelegt, die Crelle nicht gefordert hat und die in der Tat nicht mit den drei Forderungen von Crelle vereinbar ist. Weiter bemerkte er, daß mit die von Gauß in den Disquisitiones vorgeschlagene numerische Fakultät

$$(u, +x)^y = \frac{x^y \Pi\left(\frac{u}{x} - 1 + y\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x} - 1\right)}.$$

die Bedingungen von Crelle erfüllt, so daß die Kritik von Ohm in diesem Punkt nicht gerechtfertigt ist. An anderer Stelle sagte Ohm, man müsse sich sehr irren, wenn der für $y \in \mathbb{N}$ richtige sogenannte binomische Lehrsatz für ganze Fakultäten, kann für gebrochene (oder gar allgemeine) Werte von y höchstens in einer modifizierten Weise richtig sein. Weierstraß betsätigt dies, stellt aber fest, daß diese modifizierte Form tatsächlich zumindest durch die Gaußsche numerische Fakultät erfüllt ist. Er versucht, diese Korrektur in die Arbeit von Crelle einzuarbeiten, stellt aber fest, daß diese Arbeit noch weitere Mängel hat. Crelle, dem Weierstraß seine Überlegungen mitteilte, forderte ihn zu der Veröffentlichung derselben auf. Als Beilage zum Jahresbericht über das Progymnasium zu Deutsch–Crone für das Schuljahr 1842–1843 publiziert Weierstraß eine erste Arbeit zu diesem Thema. Darin zeigt er unter anderem, daß die analytischen Fakultäten von Crelle durch die Bedingungen (1.16) -(1.18) noch nicht eindeutig bestimmt ist: für jede periodische Funktion[28] ψ mit der Periode 1 erüllt die durch

$$f(u, x, y) := x^y \frac{\psi\left(\frac{u}{x} + y - 1\right)}{\psi\left(\frac{u}{x} - 1\right)} \cdot \frac{\Pi\left(\frac{u}{x} + y - 1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x} - 1\right)} \tag{1.19}$$

definierte Funktion die Bedingungen (1.16) -(1.18).

Systematisch und in jeder Weise vollständig und abschließend behandelt Weierstraß dieses Thema in der 1856 erschienenen (aber schon am 20. Mai 1854 beendeten) Arbeit *Über die Theorie der analytischen Fakultäten* [**108**]. Zunächst beschreibt er der Reihe nach die verschiedenen Varianten der Fakultätentheorie von Kramp, Crelle, Bessel, Ohm und Oettinger und weist ihre Fehler und Mängel nach. Er zeigt, daß die Menge aller Funktionen, die den Bedingungen (1.16) -(1.18) von Crelle genügen durch (1.19) vollständig beschrieben ist[29]. In einem eigenen Abschnitt behandelt er die Konvergenztheorie für unendliche Produkte. für die Funktion $1/\Gamma$, die er mit Fc bezeichnet und *Factorielle* nennt,

[27] siehe z.B. [**50**]. Zur Auswirkung der Ausbildung durch Gudermann auf Weierstraß und seinen Zugang zur Funktionentheorie siehe die Analyse in [**75**].

[28] Hierbei ist zu beachten, daß der Begriff der Funktion noch nicht ausreichend präzisiert war.Wahrscheinlich meinte Weierstraß analytische, nicht identisch verschwindende Funktionen ψ.

[29] vergl. die vorangehende Fußnote.

beweist er die Produktdarstellung[30]

$$Fc(z) = z \prod_{j=1}^{\infty} \Big[\big(1 + \frac{z}{j}\big) \cdot \big(\frac{j+1}{j}\big)^z \Big].$$

Insbesondere ist also $Fc = 1/\Gamma$ eine ganze Funktion, die genau die Nullstellen $-n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ besitzt. Schon aus diesem Grunde findet er diese Funktion besser geeignet als Ausgangspunkt für das Studium der analytischen Fakultäten. Weiter zeigt er unter anderem, daß die Funktion Fc vollständig durch die folgenden drei Forderungen charakterisiert ist:

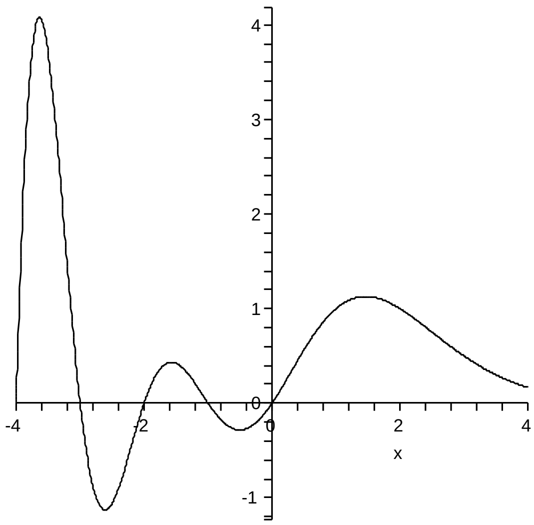

Abbildung 2. Der Verlauf von $1/\Gamma(x)$ über dem reellen Intervall $[-4, 4]$.

$$F(u) = u \cdot F(u+1), \tag{1.20}$$
$$F(1) = 1, \tag{1.21}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^u F(u+n)}{F(n)} = 1. \tag{1.22}$$

Der Beweis zeigt genauer: Ist F eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{C}$, so daß für alle $u \in D$ auch $u + 1 \in D$ gilt, und erfüllt F die Bedingungen (1.20) - (1.22), so gilt schon $F(u) = Fc(u)$ für alle $u \in D$. Umgekehrt erfüllt Fc die Bedingungen (1.20) - (1.22) auf ganz $\mathbb{C}$.

Anhang: Im 18. und 19. Jahrhundert verwendete Bezeichnungen für $n!$ und die numerischen Fakultäten.

(a) *Bezeichnungen für* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$:
- $[n]$ bei Euler z.B. in [**31**].
- Δ' bei Euler z.B. in [**33**][31].

[30]Später, bei der Herleitung des Produktsatzes von Weierstraß in [**109**] (1876) gab ihm diese Produktdarstellung die Idee zu der Einführung der Konvergenz erzeugenden Elementarfaktoren.

[31]Euler schrieb auch Δ für $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$.

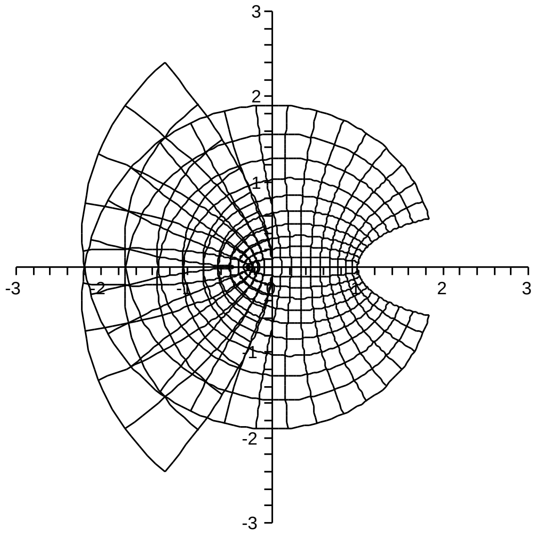

Abbildung 3. Das Bild des Quadrates mit den Eckpunkten $-1-i, -1+i, 1-i, 1+i$ unter der Abbildung $z \mapsto 1/\Gamma(z)$.

- $[1]^n_n$ bei Vandermonde in [**104**].
- $[n\ ]$ bei Lacroix [**65**], p. 76.
- $1^{n|1}$ bei Kramp [**59**], in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts sehr verbreitet.
- $n!$ bei Kramp [**60, 61**].
- $(1,1)^n$ bei Crelle [**21, 22**].
- n' bei Gudermann [**50**] und Weierstraß [**107**].

(b) *Bezeichnungen für* $a(a+r)(a+2r)\cdot \ldots \cdot (a+(m-1)r)$
- $a^{m|r}$ bei Kramp [**59**], in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts sehr verbreitet.
- $[a,r]^m$ bei Lacroix [**65**] und Gudermann [**50**].
- $(a,r)^m$ bei Crelle [**21, 22**] und Weierstraß [**108**].

1.5. Charakterisierung der Γ–Funktion von Bohr und Mollerup. Schaut man sich den Graphen von Γ auf $\mathbb{R}$ an, so sieht man, daß Γ auf $(0,\infty)$ eine konvexe Funktion ist. Dies genügt jedoch noch nicht für eine geometrische Charakterisierung: Man findet leicht konvexe, positive Funktionen Γ_0 auf $(0,\infty)$, die die Funktionalgleichung der Gammafunktion erfüllen, mit Γ auf $\mathbb{N}$ übereinstimmen und doch von Γ verschieden sind. Nun ist die Ableitung von $\log\Gamma$, also die Digammafunktion, auf $(0,\infty)$ monoton wachsend, d.h. die Funktion $x \mapsto \log\Gamma(x)$ ist auf $(0,\infty)$ konvex. 1922 erhielten Harald Bohr (1887–1951) (Bruder des Physikers Niels Bohr) und Johannes Mollerup (1872–1937) in [**16**] die folgende schöne Charakterisierung (vergl. Satz 1.8):

Ist $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *eine positive logarithmisch konvexe Funktion mit* $f(1) = 1$ *und* $f(x+1) = xf(x)$ *für alle* $x > 0$*, so gilt schon* $f(x) = \Gamma(x)$ *auf* $(0,\infty)$.

Der Beweis dieses Satzes wurde durch Emil Artin (1898–1962) in seinem Büchlein [**6**] über die Γ-Funktion noch so vereinfacht, daß man ihn auch in einer Anfängervorlesung beweisen kann.

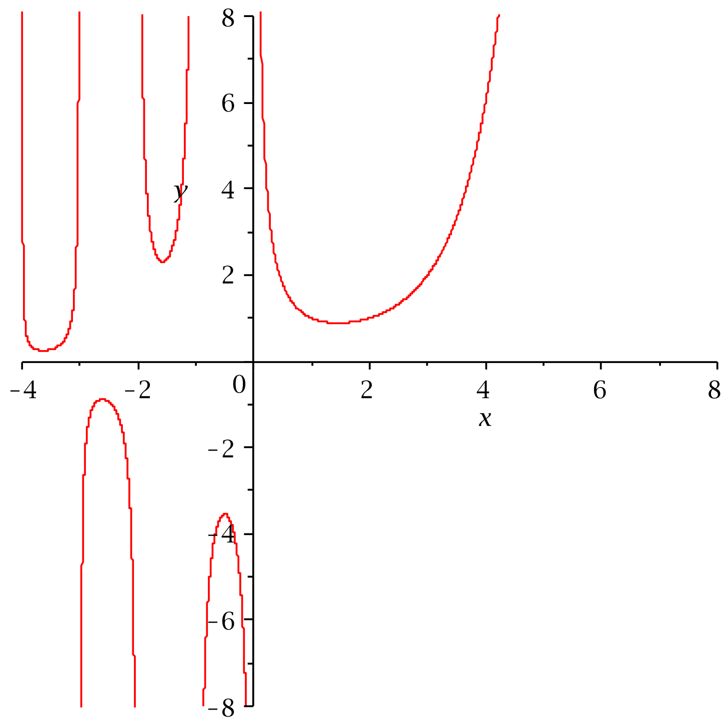

ABBILDUNG 4. Der Verlauf der Γ-Funktion über dem reellen Intervall $[-4, 4]$

2. Eigenschaften und Theorie der Γ–Funktion

Nach unserem Exkurs in die Geschichte der Gammafunktion wollen wir uns nun iherer eigentlichen Theorie zuwenden. Im ersten Abschnitt geben wir verschiedene Darstellungen der Gammafunktion und zeigen, daß sie eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion ist.

2.1. Verschiedene Darstellungen der Γ–Funktion. Wir definieren zunächst nach Euler (1769) für $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\,. \tag{1.23}$$

Wegen $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1}$ für alle $t > 0$ existiert dieses uneigentliche Integral für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$. Für $z = 1$ berechnet man $\Gamma(1) = 1$. Mit Hilfe von partieller Integration folgt die *Funktionalgleichung der Gammafunktion*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.24}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$. Mit vollständiger Induktion erhält man hieraus

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Nach Prym (1876) zerlegen wir das Integral in (1.23) in der Form

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = F_1(z) + F_2(z)\,.$$

Hierbei ist nun

$$F_2(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert. Die Funktionen f_n mit

$$f_n(z) := \int_1^n e^{-t}t^{z-1}dt \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

sind komplex differenzierbar (z.B. nach [**3**], Lemma 1.10 und Bemerkung 1.11) und damit auf $\mathbb{C}$ holomorph. Für alle $r > 0$ und alle $z \in \overline{D(0,r)}$ erhalten wir für $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}|F_2(z) - f_n(z)| = \left|\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\right| &\leq \int_n^\infty e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1}dt \leq \\ &\leq \int_n^\infty e^{-t}t^{r-1}dt \to 0\end{aligned}$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert also kompakt auf $\mathbb{C}$ gegen F_2. Nach dem Satz von Weierstraß (Satz 4.4 in [**3**]) ist F_2 daher eine ganze Funktion.

Für F_1 erhalten wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Exponentialreihe auf $[0,1]$:

$$\begin{aligned}F_1(z) &= \int_0^1 \sum_{j=0}^\infty \frac{(-t)^j}{j!} t^{z-1}dt = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^1 t^{j+z-1}dt = \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{z+j} \,.\end{aligned}$$

Wegen

$$\sup_{|z|\leq m} \left|\sum_{j=2m}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{z+j}\right| \leq \sum_{j=2m}^\infty \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{m} < \infty$$

ist die Reihe $\sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{z+j}$ kompakt in $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ konvergent gegen eine meromorphe Funktion, welche nur in den Punkten $-n$ Pole der Ordnung 1 mit dem Residuum $(-1)^n/n!$ besitzt. Wir halten fest:

Satz 1.1. *Durch*

$$\Gamma(z) := \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{z+j} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{1.25}$$

ist eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion Γ erklärt, welche nur in den Punkten $-n$ Pole der Ordnung 1 besitzt mit dem Residuum $(-1)^n/n!$ und für die gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

Aus dieser Darstellung der Γ–Funktion ersieht man auch, daß Γ auf der reellen Achse, außerhalb der Polstellen reelle Werte annimmt.

Da die Funktionen $z \mapsto \Gamma(z+1)$ und $z \mapsto z\Gamma(z)$ auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ übereinstimmen, gilt nach dem Identitätssatz für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ die Funktionalgleichung (1.24).

Zur Herleitung weiterer interessanter Darstellungen der Γ–Funktion benötigen wir noch einige elementare Hilfsmittel.

Lemma 1.2. *Für alle $t \in [0,n]$ gilt*

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0\,.$$

Beweis. Mit $h_n(t) := 1 - e^t(1-t/n)^n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t \leq n$:

$$h_n'(t) = e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{t}{n} \geq 0\,.$$

Also ist h_n auf $[0,n]$ monoton wachsend. Wegen $h_n(0) = 0$ folgt $h_n(t) \geq 0$ auf $[0,n]$ also auch

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}h_n(t) \geq 0 \quad \text{auf } [0,n].$$

□

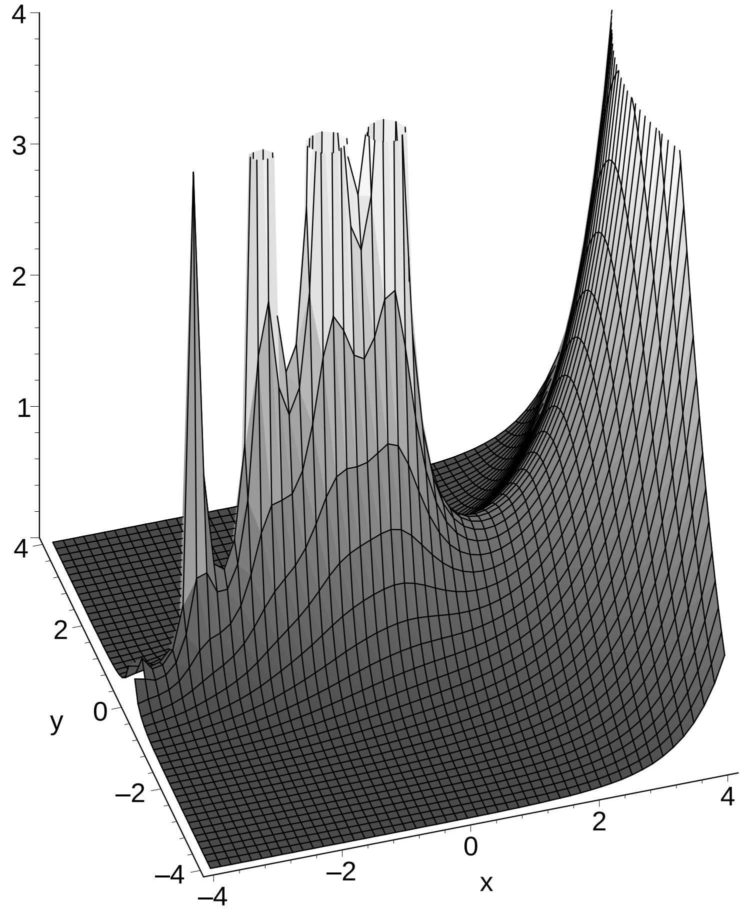

ABBILDUNG 5. $|\Gamma(x+iy)|$ für $(x,y)\in[-4,4]\times[-4,4]$

LEMMA 1.3 (Eulersche Konstante). *Der Grenzwert*

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\log(n)\Big)$$

existiert in $\mathbb{R}$. $\gamma = 0.5772156649\ldots$ *heißt die Eulersche Konstante.*

BEWEIS. Es ist

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\log(n)=\frac{1}{n}+\sum_{j=1}^{n-1}\int_j^{j+1}\Big(\frac{1}{j}-\frac{1}{t}\Big)\,dt\,.$$

Wegen

$$0<\int_j^{j+1}\Big(\frac{1}{j}-\frac{1}{t}\Big)\,dt=\int_j^{j+1}\frac{t-j}{jt}\,dt\le\int_j^{j+1}\frac{1}{j^2}\,dt=\frac{1}{j^2}$$

existiert der Grenzwert nach dem Majorantenkriterium. □

SATZ 1.4. *Für alle* $z\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad \textit{(Gauß, 1809)} \tag{1.26}$$

$$= \frac{e^{-\gamma z}}{z\prod_{j=1}^{\infty}\Big[(1+\frac{z}{j})e^{-\frac{z}{j}}\Big]} \quad \textit{(Weierstraß 1842) (Schlömilch 1844)} \tag{1.27}$$

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{n^z}{z\prod_{j=1}^{n}\Big(1+\frac{z}{j}\Big)} = \frac{n^z\prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{z}{j}}}{z\prod_{j=1}^{n}\Big[(1+\frac{z}{j})e^{-\frac{z}{j}}\Big]} = \frac{\exp\Big(z\Big(\log(n)-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\Big)\Big)}{z\prod_{j=1}^{n}\Big[(1+\frac{z}{j})e^{-\frac{z}{j}}\Big]}$$

Wegen Lemma 1.3 konvergiert der Zähler des letzten Bruchs kompakt in $\mathbb{C}$ gegen die Funktion $z \mapsto e^{-\gamma z}$. Der Nenner dieses Bruchs konvergiert nach der Weierstraßschen Theorie unendlicher Produkte (vergl. z.B. Satz 9.12 und den Bemerkungen 9.13 in [**3**]) kompakt in $\mathbb{C}$ gegen eine ganze Funktion, die nur in den Punkten aus $-\mathbb{N}_0$ Nullstellen besitzt (alle von der Ordnung 1). Hieraus folgt die kompakte Konvergenz der rechten Seiten von (1.26) und (1.27) auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gegen eine meromorphe Funktion $\tilde{\Gamma}$ mit Polen nur in $-\mathbb{N}_0$. Um zu zeigen, daß $\tilde{\Gamma}$ mit der Γ–Funktion aus Satz 1.1 übereinstimmt, genügt es nach dem Identitätssatz, dies für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ nachzuweisen. Auf der rechten Halbebene können wir die Darstellung (1.23) verwenden und erhalten für $\mathrm{Re}(z) > 0$ unter Verwendung von Lemma 1.2:

$$\begin{aligned}\Big|\Gamma(z) - \int_0^n \big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{z-1}dt\Big| &= \Big|\int_0^\infty \Big(e^{-t} - \chi_{[0,n]}(t)\big(1-\frac{t}{n}\big)^n\Big)t^{z-1}dt\Big| \\ &\le \int_0^\infty \Big(e^{-t} - \chi_{[0,n]}(t)\big(1-\frac{t}{n}\big)^n\Big)t^{\mathrm{Re}(z)-1}dt \\ &\le \int_0^\infty e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1}dt\,.\end{aligned}$$

Da die Funktion $t \mapsto e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1}$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$ auf $[0,\infty)$ integrierbar ist, folgt wegen

$$\Big(e^{-t} - \chi_{[0,n]}(t)\big(1-\frac{t}{n}\big)^n\Big)t^{\mathrm{Re}(z)-1} \to 0 \text{ punktweise für } t > 0 \text{ und } n \to \infty$$

nach dem Satz über die dominierte Konvergenz: Es ist für $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{z-1}dt\,. \tag{1.28}$$

Ferner erhält man mit der Substitution $\tau = t/n$ und n-facher partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^n \big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{z-1}dt &= n\int_0^1 (1-\tau)^n n^{z-1}\tau^{z-1}d\tau = \quad n^z\int_0^1 (1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\,.\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (1.28) ein, so erhalten wir die Gültigkeit von (1.26) auf der rechten Halbebene (und damit auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$). □

Folgerung 1.5 (Eulersche Reflexionsformel, 1771). *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,. \tag{1.29}$$

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ erhält man unter Verwendung der Funktionalgleichung (1.24) und von (1.27)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) = \frac{-z}{-z^2\Big[\prod_{j=1}^{\infty}\Big((1+\frac{z}{j})e^{-z/j}\Big)\Big]\Big[\prod_{j=1}^{\infty}\Big((1-\frac{z}{j})e^{z/j}\Big)\Big]}$$

Mit der von Euler angegebenen Produktdarstellung für die Sinusfunktion (siehe z.B. [**3**], Beispiel 9.18) folgt hieraus die Behauptung. □

Speziell für $z = 1/2$ erhalten wir aus (1.29)

$$\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}\,. \tag{1.30}$$

Hiermit berechnet man mit der Variablensubstitution $t = x^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}\,.$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung (1.24) lassen sich hieraus weitere Werte berechnen, z.B.

$$\Gamma\big(\frac{3}{2}\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{1.31}$$

2.2. Die Digammafunktion und der Satz von Bohr und Mollerup.

Definition 1.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ohne Nullstellen in Ω. Dann heißt f'/f die *logarithmische Ableitung von f* auf Ω.

Ist auch $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ohne Nullstellen in Ω, so rechnet man nach

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\,.$$

Durch vollständige Induktion sieht man, daß für endlich viele nullstellenfreien Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f := \prod_{j=1}^n f_j$ gilt:

$$\frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j'}{f_j}\,. \tag{1.32}$$

Es gilt sogar:

Lemma 1.7. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von nullstellenfreien Funktionen aus $\mathcal{O}(\Omega)$, für die das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ kompakt konvergent gegen eine in Ω holomorphe nullstellenfreie Funktion f ist. Dann gilt*

$$\frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j'}{f_j}$$

mit kompakter Konvergenz in Ω.

Beweis. Mit $p_n := \prod_{j=1}^n f_j$ gilt nach (1.32)

$$\frac{p_n'}{p_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j'}{f_j}\,. \tag{1.33}$$

Nach dem Satz von Weierstraß folgt aus der kompakten Konvergenz von p_n gegen f konvergiert, auch die kompakte Konvergenz von p_n' gegen f' in Ω. Da f nullstellenfrei ist, überlegt man sich leicht, daß auch $1/p_n \to 1/f$ mit kompakter Konvergenz in Ω gilt. Also konvergiert die linke Seite und damit auch die rechte Seite von (1.33) gegen f'/f. □

Die logarithmische Ableitung der Γ–Funktion bezeichnet man meist mit Ψ und nennt sie auch die *Digammafunktion*. Wegen

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}\Big[\big(1+\frac{z}{j}\big)e^{-\frac{z}{j}}\Big] \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$$

erhält man nach Lemma 1.7 für alle $z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$:

$$\begin{aligned}\Psi(z) =&\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{\left(\frac{1}{\Gamma}\right)'(z)}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{-\frac{1}{j}}{1+\frac{z}{j}} + \frac{1}{j}\right) = \\ =& -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+z}\right)\end{aligned} \tag{1.34}$$

mit kompakter Konvergenz der Reihe. Nach dem Satz von Weierstraß (siehe z.B. [**3**], Satz 4.4) dürfen wir gliedweise differenzieren und erhalten

$$\Psi'(z) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+z)^2} \tag{1.35}$$

mit ebenfalls kompakter Konvergenz in $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$.

Auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}\,;\, x\le 0\}$ ist durch

$$F(z) := \int_{[1,z]}\frac{\Gamma'(\zeta)}{\Gamma(\zeta)}\,d\zeta$$

eine komplexe Stammfunktion zu $\Psi = \Gamma'/\Gamma$ auf G gegeben. Wegen

$$\frac{d}{dz}\Big(\frac{e^{F(z)}}{\Gamma(z)}\Big) = \frac{\Gamma(z)F'(z)e^{F(z)} - \Gamma'(z)e^{F(z)}}{\Gamma(z)^2} = \frac{e^{F(z)}}{\Gamma(z)^2}\Big(\Gamma(z)\cdot\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \Gamma'(z)\Big) \equiv 0$$

gilt

$$\forall z\in G: \quad \exp(F(z)) = c\Gamma(z)$$

mit einer Konstanten $c\in\mathbb{C}$. Wegen $F(1)=0$ und $\Gamma(1)=1$ folgt $c=1$. Wir schreiben daher für alle $z\in G$

$$\operatorname{Log}(\Gamma(z)) = F(z) = \int_{[1,z]}\frac{\Gamma'(\zeta)}{\Gamma(\zeta)}\,d\zeta\,. \tag{1.36}$$

$z\mapsto \operatorname{Log}(\Gamma(z))$ ist also die Stammfunktion zu Ψ auf G, die auf $(0,\infty)$ mit $\log(\Gamma(x))$ übereinstimmt. Aus (1.35) folgt insbesondere, daß die Funktion $x\mapsto\log(\Gamma(x))$ auf $\{x\in\mathbb{R}\,;\,x>0\}$ eine konvexe Funktion ist, da die zweite Ableitung dort positiv ist. Es gilt sogar

Satz 1.8 (Bohr–Mollerup, 1922). *Ist $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ eine positive logarithmisch konvexe Funktion mit $f(1)=1$ und $f(x+1)=xf(x)$ für alle $x>0$, so gilt schon $f(x)=\Gamma(x)$ auf $(0,\infty)$.*

Beweis. Für konvexe Funktionen $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ und $0<a<b<c$ gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} \le \frac{g(c)-g(a)}{c-a} \le \frac{g(c)-g(b)}{c-b}\,.$$

Hieraus erhält man für $g(x)=\log(f(x))$ wegen der Konvexität von $x\mapsto\log(f(x))$ für $0<x<1$ (mit $a=n, b=n+1, c=n+1+x$ und $a=n+1, b=n+1+x, c=n+2$)

$$\begin{aligned}\log(f(n+1)) - \log(f(n)) \le&\frac{1}{x}(\log(f(n+1+x)) - \log(f(n+1))) \le \\ \le&\log(f(n+2)) - \log(f(n+1))\,.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung $f(x+1) = xf(x)$ und der Anfangsbedingung $f(1) = 1$ geht diese Ungleichungskette über in

$$x\log(n) \le \log\left((x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)xf(x)\right) - \log(n!) \le x\log(n+1)\,,$$

woraus man durch einfache Umformung

$$0 \le \log\left(\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}{n!n^x}\cdot f(x)\right) \le x\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

erhält. Für $n \to \infty$ folgt daher mit (1.26)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x} = \Gamma(x)\,.$$

Also gilt $f(x) = \Gamma(x)$ für $0 < x \le 1$. Da beide Funktionen die Funktionalgleichung der Γ–Funktion erfüllen, müssen sie dann auch auf ganz $(0,\infty)$ übereinstimmen. □

2.3. Die Multiplikationsformel von Gauß. Wir leiten nun die Gaußsche Multiplikationsformel für die Gammafunktion her:

Satz 1.9. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$ gilt:*

(a) $\Psi(z) = \log n + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\Psi\Big(\frac{z+r}{n}\Big).$

(b) $\Gamma(z) = n^{z-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\displaystyle\prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\Big(\frac{z+r}{n}\Big).$ *(Gauß, 1812)*

Beweis. (a) Setzen wir zur Abkürzung

$$\Psi_m(z) := \gamma + \sum_{j=0}^{m-1}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{z+1}\Big) \qquad (m\in\mathbb{N}, z\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)),$$

so erhält man aus der Darstellung (1.35) der Digamma–Funktion

$$\Psi(z) = \lim_{m\to\infty}\Psi_m(z) \tag{1.37}$$

mit kompakter Konvergenz in $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$. Für alle $m,n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}_0)$, gilt nun:

$$\begin{aligned}
\Psi_{mn}(z) &= \gamma + \sum_{j=0}^{mn-1}\frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{mn-1}\frac{1}{z+j}\\
&= \gamma + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j+1} + \sum_{j=m}^{mn-1}\frac{1}{j+1} - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{z+kn+r}\\
&= \gamma + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j+1} + \sum_{j=m}^{mn-1}\frac{1}{j+1} - \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\frac{z+r}{n}+k}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\Psi_m\Big(\frac{z+r}{n}\Big) + \sum_{j=1}^{mn-n}\frac{1}{1+\frac{j}{m}}\cdot\frac{1}{m}\,.
\end{aligned}$$

Für $m\to\infty$ folgt mit (1.37):

$$\Psi(z) = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\Psi_m\Big(\frac{z+r}{n}\Big) + \int_0^{n-1}\frac{1}{1+x}\,dx = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\Psi_m\Big(\frac{z+r}{n}\Big) + \log n\,.$$

(b) Da die Funktion $z \mapsto \operatorname{Log}\Gamma(z)$ eine Stammfunktion zu Ψ ist, folgt aus (a) durch Übergang zur Stammfunktion

$$\operatorname{Log}\Gamma(z) = \sum_{r=0}^{n-1} \operatorname{Log}\Gamma\Big(\frac{z+r}{n}\Big) + z\log n + C$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit einer von z unabhängigen Konstanten $C \in \mathbb{C}$. Einsetzen in die Exponentialfunktion ergibt

$$\Gamma(z) = e^C n^z \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{z+r}{n}\Big). \tag{1.38}$$

Speziell für $z = 1$ erhält man sowohl

$$1 = n \cdot e^C \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{1+r}{n}\Big) = n \cdot e^C \prod_{r=1}^{n} \Gamma\Big(\frac{r}{n}\Big) = n \cdot e^C \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{r}{n}\Big)$$

als auch

$$1 = n \cdot e^C \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{n-r}{n}\Big).$$

Multplikation dieser beiden Gleichungen ergibt in Verbindung mit der Eulerschen Reflexionsformel (Folgerung 1.5) und Aufgabe 1.5

$$1 = n^2 \cdot e^{2C} \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{r}{n}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{r}{n}\Big) = n^2 \cdot e^{2C}\pi^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\frac{r}{n}\pi)} = n^2 \cdot e^{2C}\pi^{n-1} \cdot \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Löst man dies nach e^C auf und setzt das Ergebnis in (1.38) ein, so folgt die Behauptung für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und damit nach dem Identitätssatz für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. □

Im Spezialfall $z = 1$ ergibt sich aus der Gaußschen Multiplikationsformel die schon Euler bekannte Multiplikationsformel (1.9). Auch die folgende Eulersche Multiplikationsformel von 1748 für die Sinusfunktion erhalten wir als Folgerung der Gaußschen Multiplikationsformel.

Folgerung 1.10 (Eulersche Multiplikationsformel für die Sinusfunktion). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sin(z) = 2^{n-1} \prod_{r=0}^{n-1} \sin\Big(\frac{z+r\pi}{n}\Big).$$

Beweis. Aufgrund des Identitätssatzes genügt es, die Behauptung für alle $x \in (0, \pi)$ zu beweisen. Nach der Gaußschen Multiplikationsformel gilt

$$\Gamma\Big(\frac{x}{\pi}\Big) = n^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{\frac{x}{\pi}+r}{n}\Big)$$

und

$$\begin{aligned}
\Gamma\Big(1-\frac{x}{\pi}\Big) &= n^{1-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{1-\frac{x}{\pi}x+r}{n}\Big) \\
&= n^{\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{1-\frac{x}{\pi}+n-1-r}{n}\Big) \\
&= n^{\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\Big(1-\frac{\frac{x}{\pi}+r}{n}\Big)
\end{aligned}$$

Die Multiplikation dieser beiden Gleichungen liefert in Verbindung mit dem Eulerschen Reflexionssatz (nach Übergang zum Kehrwert):

$$\frac{\sin(x)}{\pi} = \frac{2^{n-1}}{\pi} \prod_{r=0}^{n-1} \sin\left(\frac{x + r\pi}{n}\right)$$

und damit die Behauptung. □

Für $n = 2$ und durch Ersetzen von z durch $2z$ erhalten wir mit der Gaußschen Multiplikationsformel die folgende Verdoppelungsformel von Legendre:

Satz 1.11 (Verdoppelungsformel von Legendre, 1809). *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gilt:*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

2.4. Integraldarstellungen für Ψ und $\log\Gamma$. Mit Hilfe der Integraldarstellung (1.23) der Γ–Funktion leiten wir nun eine Integraldarstellung von $\Psi = \Gamma'/\Gamma$ auf der rechten Halbebene her.

Satz 1.12. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt:*

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z}\right) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1 - e^{-t}}\right) dt.$$

Beweis. Nach (1.23) gilt für alle $z \in \mathbb{H}_r := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^n e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß hierbei die Konvergenz gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}_r$ erfolgt. Nach dem Satz von Weierstraß (siehe z.B. [**3**], Satz 4.4) erhalten wir also

$$\Gamma'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dz} \int_{1/n}^n e^{-t} t^{z-1}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^n \frac{d}{dz}\left(e^{-t} t^{z-1}\right) dt = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^n e^{-t} \log(t) t^{z-1} dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{-t} \log(t) t^{z-1} dt.$$

Wir können hierin $\log(t)$ durch ein *Frullani–Integral* (vergl. Aufgabe 1.3) ausdrücken:

$$\log(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\, dx,$$

wobei auch $\int_0^\infty \left|\frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}\right| dx$ existiert, da der Integrand in 0 stetig ergänzbar ist. Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Gamma'(z) &= \int_0^\infty e^{-t} \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}\, dx t^{z-1} dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(e^{-x} e^{-t} t^{z-1} - e^{-t(x+1)} t^{z-1}\right) dt\, \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^\infty \left(e^{-x}\Gamma(z) - I(x,z)\right) \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

mit

$$I(x,z) := \int_0^\infty e^{-t(x+1)} t^{z-1} dt.$$

Mit der Variablensubstitution $u := t(x+1)$ erhalten wir

$$I(x,z) = \frac{1}{(x+1)^z}\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du = \frac{\Gamma(z)}{(x+1)^z}\,.$$

Setzen wir dies ein, so folgt für alle $z \in \mathbb{H}_r$

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z)\int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z}\right)\frac{dx}{x}\,,$$

woraus sich nach Division durch $\Gamma(z)$ die erste behauptete Integraldarstellung von Ψ ergibt. Insbesondere erhalten wir für alle $z \in \mathbb{H}_r$

$$\Psi(z) = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_\delta^\infty \frac{1}{x(x+1)^z}\,dx\right)\,,$$

und hieraus vermöge der Substitution $t = \log(x+1)$ beim rechten Integral

$$\begin{aligned}\Psi(z) =& \lim_{\delta\to 0}\left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_{\log(\delta+1)}^\infty \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\,dt\right)\\ =& \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{\log(\delta+1)}^\infty \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\,dt - \int_{\log(\delta+1)}^\delta \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)\end{aligned}$$

Wegen

$$0 \le \int_{\log(\delta+1)}^\delta \frac{e^{-t}}{t}\,dt \le \int_{\log(\delta+1)}^\delta \frac{1}{\log(\delta+1)}\,dt = \frac{\delta}{\log(\delta+1)} - 1 \to 0$$

für $\delta \searrow 0$ folgt also für $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\Psi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right)\,dt$$

und damit die Behauptung. □

Mit Hilfe der in Satz 1.12 bereitgestellten Integralformel für die Digammafunktion werden wir eine Darstellung von LogΓ herleiten, die beim Beweis der Stirlingschen Formel im kommenden Abschnitt nützlich sein wird. Hierzu benötigen wir das folgende Resultat für die Laplace–Transformation.

Satz 1.13 (Dirichlet–Kriterium für die Laplace–Transformation). *Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine auf $[0,\infty)$ stetig differenzierbare Funktion mit $f(t) \to 0$ für $t \to \infty$ welche für ein $t_0 \ge 0$ auf $[t_0,\infty)$ monoton ist. Dann existiert für alle $0 \ne z \in \overline{\mathbb{H}_r} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) \ge 0\}$ das uneigentliche Riemann–Integral*

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-tz}\,dt$$

und die hierdurch auf $\overline{\mathbb{H}_r}\setminus\{0\}$ definierte Funktion $F : \overline{\mathbb{H}_r}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ ist stetig und auf $\mathbb{H}_r$ holomorph.

Beweis. Indem wir notfalls f durch $-f$ ersetzen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß f auf $[t_0,\infty)$ monoton fallend ist. Wir zeigen, die gleichmäßige Konvergenz

$$F_c(z) := \int_0^c f(t)e^{-tz}\,dt \to F(z)$$

in z auf jeder kompakten Teilmenge von $\overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\}$ für $c \to \infty$. Sei also K eine beliebige kompakte Teilmenge von $\overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\}$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $f(t) \to 0$ für $t \to \infty$ gibt es ein $t_1 \geq t_0$ mit

$$f(t) = |f(t)| < \operatorname{dist}(0, K)\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } t > t_1. \tag{1.39}$$

Für $t_0 \leq b \leq c$ folgt mit partieller Integration für alle $z \in K$ (unter Verwendung von $|e^{-tz}| = e^{-\operatorname{Re}(tz)} \leq 1$ für $t > 0$ und $z \in \overline{\mathbb{H}_r}$ sowie $|f(t)| = f(t)$ und $|f'(t)| \equiv -f'(t)$ für $t \geq t_0$) nach (1.39):

$$\begin{aligned}|F_c(z) - F_b(z)| &= \Big|\int_b^c f(t)e^{-tz}\,dt\Big| = \Big|\frac{1}{z}e^{-zb}f(b) - \frac{1}{z}e^{-zc}f(c) + \frac{1}{z}\int_b^c f'(t)e^{-tz}\,dt\Big| \\ &\leq \frac{1}{|z|}(|f(b)| + |f(c)|) + \frac{1}{|z|}\int_b^c -f'(t)\,dt = \frac{2}{|z|}f(b) < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Also konvergiert F_c gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\}$ gegen F. Da die Funktionen F_c, $c > 0$, auf $\mathbb{C}$ holomorph sind, folgt die Stetigkeit von F auf $\overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\}$ und die Holomorphie von F auf der offenen, rechten Halbebene $\mathbb{H}_r$. □

Satz 1.14. *Für alle* $0 \neq z \in \overline{\mathbb{H}_r} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ *gilt*

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(\Gamma(z)) &= \big(z - \frac{1}{2}\big)\log(z) - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \omega(z) \\ \textit{mit} \quad \omega(z) &= \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\Big(\frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}\Big)e^{-tz}dt\,.\end{aligned} \tag{1.40}$$

Beweis. Die (in 0 durch $f(0) := 1/12$ ergänzte) Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := \frac{1}{t^2}\Big(\frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}\Big)$$

für alle $t \geq 0$ ist nach Aufgabe 1.2 auf $[0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar, und monoton fallend mit $f(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Nach dem soeben gezeigten Satz 1.13 ist ω daher auf ganz $\overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\}$ stetig und auf $\mathbb{H}_r$ holomorph. Da $\operatorname{Log}\Gamma$ auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ holomorph und somit insbesondere auf $\overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\}$ stetig ist, genügt es, die Gleichung (1.40) für alle $z \in \mathbb{H}_r$ nachzuweisen.

Sei also $z \in \mathbb{H}_r$ beliebig. Nach der zweiten Integralformel für Ψ aus Satz 1.12 folgt

$$\begin{aligned}\Psi(z+1) &= \int_0^\infty \Big(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}e^{-t}}{1 - e^{-t}}\Big)\,dt = \int_0^\infty \Big(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^t - 1}\Big)\,dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-tz}dt - \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\Big)e^{-tz}dt \\ &= \operatorname{Log}(z) + \frac{1}{2z} - \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\Big)e^{-tz}dt\,.\end{aligned}$$

Integration längs der Strecke $[1, z]$ von 1 nach z ergibt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(\Gamma(z+1)) &= \operatorname{Log}(\Gamma(z+1)) - \operatorname{Log}(\Gamma(2)) \\ &= (\operatorname{Log}(z) - 1)z + 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(z) - \int_{[1,z]}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\Big)e^{-t\zeta}dt\,d\zeta\,.\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{Log}(\Gamma(z+1)) = \mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(\Gamma(z))$ (was man leicht mit Hilfe von (1.24) verifiziert) erhalten wir mit Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach Fubini

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(\Gamma(z)) =& -\mathrm{Log}(z) + (\mathrm{Log}(z)-1)z + 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(z) + \\ &+ \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\Big)\frac{e^{-tz}-e^{-t}}{t}\,dt \\ =&\Big(z-\frac{1}{2}\Big)\mathrm{Log}(z) - z + 1 + \int_0^\infty f(t)(e^{-tz}-e^{-t})\,dt\,.\end{aligned} \tag{1.41}$$

Mit

$$I := \int_0^\infty f(t)e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty f\big(\frac{t}{2}\big)e^{-t/2}dt \text{ und } J := \int_0^\infty f(t)e^{-t/2}dt$$

hat man einerseits

$$J - I = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t} \tag{1.42}$$

und andererseits aus (1.41) (mit $z = 1/2$) unter Verwendung von (1.30)

$$J - I = \log\left(\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log(\pi) - \frac{1}{2}\,. \tag{1.43}$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}J =&(J-I)+I = \int_0^\infty \Big(\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2}\Big)\frac{dt}{t} \\ =&\int_0^\infty \Big(-\frac{d}{dt}\Big(\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t}\Big) + \frac{e^{-t}-e^{-t/2}}{2t}\Big)\,dt \\ =&-\frac{e^{-t/2}-e^{-t}}{t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-t/2}}{t}\,dt \\ =&\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\big(\frac{1}{2}\big)\,.\end{aligned}$$

Mit (1.43) erhalten wir also für I:

$$I = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi)\,.$$

Setzen wir diesen Wert von I in (1.41) ein, so folgt (1.40) für $\mathrm{Re}(z) > 0$ □

2.5. Die allgemeine Stirlingsche Formel. für $0 < \alpha < \pi$ untersuchen wir nun das asymptotische Verhalten von $\Gamma(z)$ in dem Winkelbereich $S_\alpha := \{re^{i\varphi}\,;\, r > 0,\, |\varphi| \le \alpha\}$.

Zunächst erhalten wir mit Satz 1.14 eine asymptotische Entwicklung für $\mathrm{Log}\Gamma$ auf $\overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\}$. Hierzu beachten wir, daß für die Funktion f aus dem Beweis zu Satz 1.14 gilt: Alle Ableitungen von f der Ordnung ≥ 1 sind auf $[0,\infty)$ absolut integrierbar. Dies zeigt man leicht durch vollständige Induktion nach der Ableitungsordnung. Mit partieller Integration folgt für $0 \ne z \in \overline{\mathbb{H}_r}$

$$\omega(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-tz}\,dt = \frac{f(0)}{z} + \frac{1}{z}\int_0^\infty f'(t)e^{-tz}\,dt = \frac{1}{12z} + \frac{1}{z}\int_0^\infty f'(t)e^{-tz}\,dt$$

und hieraus nach (1.40) wegen $|f'(t)| = -f'(t)$ und $f'(t) \to 0$ für $0 \le t \to \infty$:

$$\begin{aligned}\Big|\mathrm{Log}\Gamma(z) - \big(z-\frac{1}{2}\big)\log(z) + z - \frac{1}{2}\log(2\pi)\Big| &= |\omega(z)| \\ &\le \frac{1}{12|z|} + \frac{1}{|z|}\int_0^\infty(-f'(t))\,dt = \frac{1}{6|z|}\end{aligned} \tag{1.44}$$

Durch mehrfache partielle Integration erhalten wir Approximationen höherer Ordnung von LogΓ:

$$\omega(z) = \frac{1}{12z} + \frac{1}{z}\int_0^\infty f'(t)e^{-tz}\,dt = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z^2} + \frac{1}{z^2}\int_0^\infty f''(t)e^{-tz}\,dt = \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{z^{k+1}} + \frac{1}{z^{n+1}}\int_0^\infty f^{(n+1)}(z)e^{-tz}\,dt\,.$$

Mit Aufgabe 1.2 folgt

$$f^k(0) = \frac{B_{k+2}}{(k+1)(k+2)}$$

und $B_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

Satz 1.15. *Für alle $0 \neq z \in \overline{\mathbb{H}_r}$ gilt*

$$\mathrm{Log}\Gamma(z) = \big(z - \frac{1}{2}\big)\log(z) - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)z^{2k+1}} + \frac{1}{z^{2n+2}}R_n(z)$$

mit

$$|R_n(z)| = \Big|\int_0^\infty f^{2n+2}(t)e^{-tz}\,dt\Big| \le C_n := \int_0^\infty |f^{2n+2}(t)|\,dt < \infty.$$

Für $n = 4$ erhalten wir etwa

$$\mathrm{Log}\Gamma(z) = \big(z-\frac{1}{2}\big)\log(z)-z+\frac{1}{2}\log(2\pi)+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\frac{1}{1680z^7}+\frac{1}{1188z^9}+\mathbf{O}\Big(\frac{1}{z^{10}}\Big).$$

Für die Gammafunktion selbst erhalten wir nun:

Satz 1.16. *F ür alle $\alpha \in (0, \pi)$ gilt in S_α:*

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\exp\Big(\Big(z - \frac{1}{2}\Big)\mathrm{Log}(z) - z\Big) \cdot \Big(1 + \frac{1}{12z} + O\Big(\frac{1}{|z|^2}\Big)\Big) \tag{1.45}$$

für $|z| \to \infty$. Für $x \in (0, \infty)$ gilt also

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{(x-1/2)}e^{-x}\Big(1 + \frac{1}{12x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) \quad \text{für } x \to \infty\,. \tag{1.46}$$

Insbesondere folgt für $n \in \mathbb{N}$ die Stirlingsche Formel

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(1 + \frac{1}{12n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \quad \text{für } n \to \infty\,. \tag{1.47}$$

Beweis. Wir beweisen die asymptotische Darstellung (1.45) zunächst in der abgeschlossenen rechten Halbebene $\overline{\mathbb{H}_r} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) \ge 0\}$.

Wenden wir auf (1.40) die Exponentialfunktion an,

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\exp\Big(\Big(z - \frac{1}{2}\Big)\mathrm{Log}(z) - z\Big)e^{\omega(z)}\,, \tag{1.48}$$

so folgt (1.45) für $0 < \alpha \le \pi/2$, denn wegen Satz 1.15 gilt

$$e^{\omega(z)} = 1 + \omega(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega(z)^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{1}{12z} + O\Big(\frac{1}{|z|^2}\Big) \qquad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } \overline{\mathbb{H}_r}. \tag{1.49}$$

(1.46) ist nun klar und (1.47) folgt aus (1.46) unter Beachtung von $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Sei nun $\pi/2 < \alpha < \pi$. Für $w \in S_\alpha$ mit $\mathrm{Re}(w) < 0$ ist $z := -w \in \mathbb{H}_r$. Mit der Eulerschen Reflexionsformel (1.5) und (1.24) erhalten wir

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\sin(\pi z)}$$

und hieraus mit (1.48)

$$\begin{aligned}\Gamma(w) =&\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\sin(\pi z)\Gamma(z)}\\ =&\frac{-\pi}{z\sin(\pi z)\sqrt{2\pi}\exp\Big(\Big(z-\frac{1}{2}\Big)\mathrm{Log}(z)-z\Big)e^{\omega(z)}}\\ =&\frac{i\sqrt{2\pi}\exp\Big(\Big(-z-\frac{1}{2}\Big)\mathrm{Log}(z)-z\Big)e^{-\omega(z)}}{-2i\sin(\pi z)}\end{aligned}$$

Beachten wir nun noch $-2i\sin(z) = 2i\sin(w) = e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}$ und

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(-w) = \begin{cases}\mathrm{Log}(w) - i\pi & \text{falls } \mathrm{Im}(w) > 0\\ \mathrm{Log}(w) + i\pi & \text{falls } \mathrm{Im}(w) < 0\,,\end{cases}$$

so erhalten wir im Fall $\mathrm{Im}(w) > 0$:

$$\Gamma(w) = \frac{\sqrt{2\pi}\exp\Big(\Big(w-\frac{1}{2}\Big)\mathrm{Log}(w)+w\Big)e^{-\omega(-w)}}{1-e^{+i2\pi w}}$$

Nun gilt für $w \in S_\alpha$ mit $\mathrm{Im}(w) > 0$ und $\mathrm{Re}(w) < 0$ und alle $k > 0$:

$$|e^{i2\pi w}| = e^{-2\pi\mathrm{Im}(w)} \le e^{-2\pi\sin(\alpha)|w|} = o(|w|^{-k}) \qquad \text{für } |w| \to \infty$$

und unter Verwendung von (1.49)

$$e^{-\omega(-w)} = 1 + \frac{1}{12w} + O(|w|^{-2}) \qquad \text{für } |w| \to \infty\,.$$

Hiermit erhält man (1.45) auch auf $\{w \in S_\alpha\,;\, \mathrm{Im}(w) > 0, \mathrm{Re}(w) < 0\}$.

Den Bereich $\{w \in S_\alpha\,;\, \mathrm{Im}(w) < 0, \mathrm{Re}(w) < 0\}$ behandelt man analog. □

Verwendet man Approximationen höherer Ordnung für LogΓ, so erhält man Approximationen höherer Ordnung für die Gammafunktion wie z.B.

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\exp\Big(\Big(z-\frac{1}{2}\Big)\mathrm{Log}(z)-z\Big)\cdot\Big(1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}+\mathbf{O}\Big(\frac{1}{|z|^4}\Big)\Big)$$

Zum Abschluß dieses Kapitels zeigen wir eine Anwendung der Stirlingschen Formel bei der Untersuchung des Randwachstums holomorpher Funktionen auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$.

Satz 1.17. *Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ gegeben durch eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad (z \in \mathbb{D})$$

mit $|c_k| \le C_0 k^\alpha$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, mit reellen Konstante $C_0 > 0$ und $\alpha > -1$, so gibt es eine Konstante $C \ge 0$ mit

$$|f(z)| \le \frac{C}{(1-|z|)^{\alpha+1}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}\,.$$

BEWEIS. Nach der Stirlingschen Formel gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)k^\alpha} &= \lim_{k\to\infty}\frac{(\alpha+k+1)^{\alpha+k+\frac12}e^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha+1)(k+1)^{k+\frac12}e^{-k-1}k^\alpha}\\ &=\frac{e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{\alpha+k+1}{k+1}\Big)^{k+\frac12}\Big(\frac{\alpha+k+1}{k}\Big)^\alpha\\ &=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned}$$

Also gibt es eine Konstante $C_1 \geq 0$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|c_k| \leq C_1\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}\,.$$

Daher erhalten wir für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq \sum_{k=0}^\infty |c_k||z|^k \leq C_0\sum_{k=0}^\infty k^\alpha|z|^k\\ &\leq C_1C_0\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}|z|^k = \frac{C}{(1-|z|)^{\alpha+1}}\,,\end{aligned}$$

mit $C = C_0C_1$. □

3. Die q–Gammafunktion

Natürlich gibt es bei einer so schönen Funktion mit so interessanten Eigenschaften auch Bemühungen, die gewonnene Theorie in einen allgemeineren Rahmen einzubetten. Auf einen solchen Versuch soll hier noch kurz hingewiesen werden: für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1-q^n}{1-q} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$$

und

$$n = \lim_{q\to1} 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \lim_{q\to1}\frac{1-q^n}{1-q},.$$

Durch

$$n!_q := \prod_{j=1}^n\frac{1-q^j}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^n}\cdot\prod_{j=1}^n(1-q^j)$$

ist also ein vernünftiges Analogon zur Fakultät gegeben. für $0 < q < 1$ lässt sich dies auch schreiben in der Form

$$n!_q = \frac{1}{(1-q)^n}\prod_{j=1}^\infty\frac{1-q^j}{1-q^{n+j}}\,.$$

F.H. Jackson hat 1910 bemerkt, daß die rechte Seite für alle reellen Zahlen $n > 0$ definiert ist und definierte

$$\Gamma_q(x) := (1-q)^{1-x}\prod_{j=0}^\infty\frac{1-q^j}{1-q^{n+j}}\,,\quad x>0.$$

Die Funktionalgleichung lautet nun

$$\Gamma_q(x+1) = \frac{1-q^x}{1-q}\Gamma_q(x),\quad x>0.$$

Es zeigt sich, daß die meisten Eigenschaften der Gammafunktion ein natürliches q–Analogon besitzen. Selbst der Satz von Bohr und Mollerup bleibt für die q–Gammafunktion richtig, wie Richard Askey 1978 in [**7**] gezeigt hat. Auch eine q–Variante der Betafunktion kann man einführen.

Askey hat in [**8**] einen Überblick über die Geschichte dieser Entwicklungen gegeben.

Die Eigenschaften der Γ–Funktion und der mit ihr verwandten speziellen Funktionen sind von vielen Autoren intensiv untersucht worden (siehe z.B. [**78, 6, 67, 52, 5**] und viele der im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher zur Funktionentheorie).

Übungsaufgaben zu Kapitel 1

AUFGABE 1.1. Zeigen Sie: Die durch

$$h(z) := \frac{z}{e^z - 1}$$

auf $\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ definierte Funktion h ist in 0 holomorph durch $h(0) = 1$ ergänzbar und besitzt die in einer Umgebung von 0 konvergente Potenzreihendarstellung

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Hierbei ist $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Bernoullizahlen. Diese ist definiert durch $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ und die Rekursionsformel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

AUFGABE 1.2. Die durch

$$f(z) := \frac{1}{z^2}\Big(\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} - 1\Big)$$

auf $\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ definierte Funktion ist offensichtlich auf $\mathbb{C}$ meromorph. Zeigen Sie:

(a) f ist eine gerade Funktion und in 0 holomorph durch $f(0) := 1/12$ ergänzbar.

(b) Für alle $z \in G := \mathbb{C} \setminus \{n2\pi i\,;\, 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$f(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4\pi^2 n^2}\,.$$

(c) f ist auf $[0, \infty)$ monoton fallend mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

(d) f besitzt in $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 2\pi\}$ die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+2}}{(n+2)!} z^n\,.$$

Hierbei ist $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Bernoullizahlen. Da f nach (a) eine gerade Funktion ist, folgt insbesondere $B_{2k+1} = 0$ für alle $k \geq 1$ und somit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2(n+1)}}{(2n+2)!} z^{2n}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\Big(\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}\Big) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2z}\Big(\frac{2}{e^z - 1} + 1\Big) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2z}\coth\Big(\frac{z}{2}\Big) - \frac{1}{z^2}$$

und die aus der Funktionentheorie bekannte Mittag–Leffler–Entwicklung für die Kotangensfunktion.

AUFGABE 1.3 (Frullani–Integrale 1). Seien $a, b > 0$ und sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die das uneigentliche Riemann–Integral

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

existiert. Zeigen Sie:

(a) Das uneigentliche Riemann–Integral $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$ existiert und es gilt

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\int_\delta^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\delta a}^{\delta b} \frac{f(x)}{x} dx \qquad \text{für alle } \delta > 0.$$

(b) Für alle $t > 0$ gilt:

$$\log(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\cos(x) - \cos(tx)}{x} dx\,.$$

AUFGABE 1.4 (Frullani–Integrale 2). Seien $a, b > 0$ und sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die der Grenzwert $f(\infty) := \lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert.

(a) Zeigen Sie: Das uneigentliche Riemann–Integral $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$ existiert und es gilt

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(\infty)) \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

(b) Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\tanh(ax) - \tanh(bx)}{x}.$$

AUFGABE 1.5. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n = 2^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \sin\left(\frac{r}{n}\pi\right).$$

Hinweis: Beachten Sie

$$x^n - 1 = \prod_{r=1}^{n} \left(x - \exp\left(i\frac{r}{n}2\pi\right)\right)$$

und bilden Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

AUFGABE 1.6. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > -1$ die folgende Formel gilt:

$$\int_0^1 \left(\log\left(\frac{1}{u}\right)\right)^z du = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt\,.$$

Dies zeigt, daß diese beiden Eulerschen Integrale die gleiche Funktion darstellen (nämlich $z \mapsto z! = \Gamma(z + 1)$).

Hinweis: Verwenden Sie in (1.23) die Variablensubstitution $t = \log(1/u)$.

Aufgabe 1.7. Sei $\mathbb{H}_r := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re} z > 0\}$ die offene, rechte Halbebene. Die *Beta–Funktion* $B : \mathbb{H}_r \times \mathbb{H}_r \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt \qquad (\alpha,\beta \in \mathbb{H}_r).$$

Zeigen Sie, daß für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{H}_r$ gilt:

(a) $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Hinweis: Führen Sie in dem Doppelintegral

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-t-s} dt\, ds$$

die Variablensubstitution $s = ur$, $t = (1-r)u$ durch.

(b) $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx.$

Aufgabe 1.8. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Reflexionsformel:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \qquad \left|\Gamma\Big(\frac{1}{2} + it\Big)\right| = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi t)}}\,.$$

Aufgabe 1.9. Verwenden Sie Aufgabe 1.8 und die Verdoppelungsformel von Legendre zum Beweis von

$$\forall 0 \neq t \in \mathbb{R} : \qquad \left|\frac{\Gamma(2it)}{\Gamma(it)}\right| = \frac{1}{2\sqrt{\cosh(\pi t)}}\,.$$

Aufgabe 1.10. Können Sie in Satz 1.17 auch im Fall $\alpha = -1$ etwas über das Randwachstum von f aussagen?

Aufgabe 1.11. Zeigen Sie, daß für alle $z, w \in \mathbb{H}_r$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-wt} t^{z-1}\, dt = \frac{\Gamma(z)}{w^z}\,.$$

Hinweis: Für $\mathrm{Im}(w) = 0$ folgt dies leicht mit einer geeigneten Variablensubstitution.

KAPITEL 2

Die Riemannsche Zetafunktion

1. Definition und erste Eigenschaften der Zetafunktion

Für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\mathbb{H}_s := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > s\} \quad \text{und} \quad \overline{\mathbb{H}}_s := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) \geq s\}\,.$$

Für alle $s > 1$ und alle $Z \in \overline{\mathbb{H}}_s$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|n^{-z}\right| = \left|e^{-z\log(n)}\right| = e^{-\mathrm{Re}(z)\log(n)} \leq n^{-s}\,.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ist also die Reihe

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \tag{2.1}$$

für alle $s > 1$ gleichmäßig und absolut konvergent auf $\overline{\mathbb{H}}_s$ und definiert daher eine auf $\mathbb{H}_1$ holomorphe Funktion ζ. Diese nennt man die *Riemannsche Zeta–Funktion*. Für reelles $s > 1$ gilt bei $s \searrow 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{-s} ds = \int_1^{\infty} x^{-s} ds = \frac{1}{s-1} \to \infty\,. \tag{2.2}$$

Die Riemannsche Zeta–Funktion spielt eine wesentliche Rolle in der Zahlentheorie. Dies wird bereits durch die folgenden ersten Aussagen über ζ deutlich.

Satz 2.1. (a) *Es gibt unendlich viele Primzahlen. Diese numerieren wir der Größe nach durch: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_4 = 5, \ldots$.*

(b) *Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ gilt die Produktdarstellung*

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - p_n^{-z})$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\overline{\mathbb{H}}_s$ für alle $s > 1$.

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ ist

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} - \sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-z} = \sum_{\substack{n=1 \\ 2\nmid n}}^{\infty} n^{-z}$$

Ebenso erhält man

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z})(1 - 3^{-z}) = \sum_{\substack{n=1 \\ 2\nmid n, 3\nmid n}}^{\infty} n^{-z}$$

und schließlich induktiv: Sind $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \cdots < p_N$ die ersten N Primzahlen und gilt

$$\zeta(z)\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k^{-z}) = \sum_{\substack{n=1,\, p_k\nmid n \\ \text{für } 1\leq k\leq N}}^{\infty} n^{-z}\,, \tag{2.3}$$

so kann p_N nicht die größte Primzahl sein, denn andernfalls wäre 1 die einzige natürliche Zahl mit $p_k \nmid n$ für $1 \le k \le N$. Dann würde aber

$$\zeta(z) \prod_{k=1}^{N} (1 - p_k^{-z}) = 1$$

folgen und hieraus

$$\lim_{s \searrow 1} \zeta(s) = \lim_{s \searrow 1} \prod_{k=1}^{N} (1 - p_k^{-s})^{-1} = \prod_{k=1}^{N} (1 - p_k^{-1})^{-1} < \infty$$

im Widerspruch zu (2.2). Also gibt es doch eine kleinste von $p_1, \ldots, p_N$ verschiedene Primzahl p_{N+1} und analog wie oben erhält man mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung

$$\zeta(z) \prod_{k=1}^{N+1} (1 - p_k^{-z}) = \sum_{\substack{n=1, p_k \nmid n \\ \text{für } 1 \le k \le N+1}}^{\infty} n^{-z} .$$

Damit ist (a) gezeigt und die Gültigkeit von (2.3) für alle $N \in \mathbb{N}$.

Ist $s > 1$ beliebig, so erhalten wir aus (2.3) für alle $z \in \overline{\mathbb{H}}_s$

$$\begin{aligned}\left|\zeta(z) \prod_{k=1}^{N} (1 - p_k^{-z}) - 1\right| &= \left| \sum_{\substack{n=1, p_k \nmid n \\ \text{für } 1 \le k \le N}}^{\infty} n^{-z} \right| \le \sum_{n=p_N+1}^{\infty} \left|n^{-z}\right| \le \\ &\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|n^{-z}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-s} \to 0\end{aligned}$$

für $N \to \infty$ und damit

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z}) .$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|p_n^{-z}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-s} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} < \infty$$

für $z \in \overline{\mathbb{H}}_s$ und $s > 1$ sind die Voraussetzungen zu Satz 9.5 aus [**3**] erfüllt und es folgt die gleichmäßige Konvergenz des Produktes auf $\overline{\mathbb{H}}_s$ für alle $s > 1$. □

Es zeigt sich, daß sogar die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ divergiert. In diesem Sinne liegen die Primzahlen dichter in $\mathbb{N}$ als die Quadratzahlen.

Satz 2.2. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ *ist divergent. Ferner gilt*

$$\forall s > 1 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall C > 0 \; \exists m > n : \quad p_m < C m^s . \tag{2.4}$$

Beweis. Wäre (2.4) verletzt, so würde die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ nach dem Majorantenkriterium konvergieren. Wir zeigen indirekt, daß dies nicht der Fall ist.

Annahme: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ konvergiert. Nach Lemma 9.7 in [**3**] gilt dann $\varepsilon := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-1}) > 0$. Für alle $s > 1$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt wegen $0 < 1 - p_n^{-1} < 1 - p_n^{-s} < 1$ nach Satz 2.1 auch

$$0 < \varepsilon = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-1}) \le \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s}) = \zeta(s)^{-1} .$$

Wegen $\zeta(s) \to \infty$ für $s \searrow 1$ erhalten wir einen Widerspruch. Also muß die Behauptung richtig sein. □

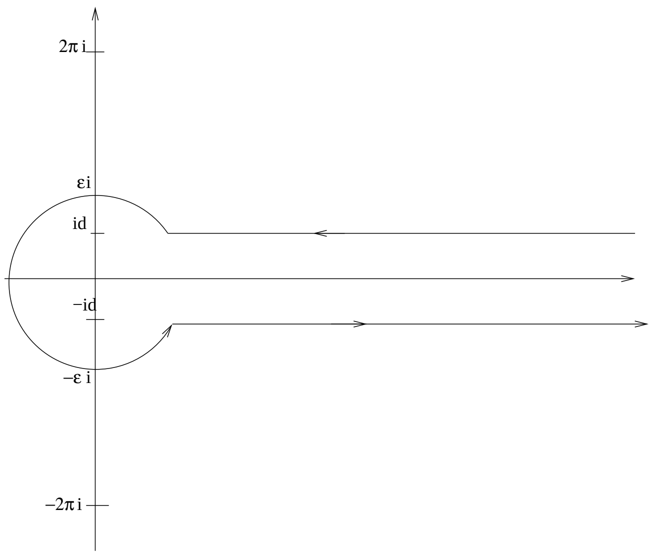

ABBILDUNG 1. Der Verlauf des Integrationsweges $\gamma_{\varepsilon,d}$

Im folgenden Lemma stellen wir einen Zusammenhang von ζ mit der Γ–Funktion her.

LEMMA 2.3. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re}(z) > 1$ *gilt*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx\,.$$

BEWEIS. Nach (1.23) gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\,.$$

Mit der Substitution $x := t/n$ erhalten wir hieraus:

$$\Gamma(z) = n^z \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} dx$$

und damit

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} dx\,.$$

Durch Summation über $n \in \mathbb{N}$ folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$:

$$\begin{aligned}\zeta(z)\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^{z-1} dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{z-1} dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{z-1}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx\,.\end{aligned}$$

□

SATZ 2.4. *Für alle* $z \in \mathbb{H}_1$ *gilt*

$$\zeta(z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,d}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1}\, dw\,,$$

wobei $(-w)^{z-1} := \exp((z-1)\operatorname{Log}(-w))$ *für alle* $w \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq 0\}$ *und* $\gamma_{\varepsilon,d}$ *mit* $0 < d < \varepsilon < 2\pi$ *der aus Abbildung 1 ersichtliche Weg ist.*

Beweis. Man verifiziert durch direktes Nachrechnen, daß das uneigentliche Wegintegral $\int_{\gamma_{\varepsilon,d}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w-1}\,dw$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert, daß also durch

$$z \mapsto F(z) := \int_{\gamma_{\varepsilon,d}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1}\,dw \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion gegeben ist. Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes überlegt man sich ferner, daß der Wert des Integrals unabhängig von ε und d ist, unter der Einschränkung $0 < d < \varepsilon < 2\pi$. Für $d \to 0$ und $x > 0$ folgt

$$\lim_{d\to 0} \operatorname{Log}(-(x \pm id)) = \log(x) \mp \pi i$$

und damit

$$\begin{aligned} F(z) &= \lim_{d\to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,d}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1}\,dw \\ &= \int_{\partial_+ D(0,\varepsilon)} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1}\,dw - \int_\varepsilon^\infty \frac{x^{z-1}e^{-(z-1)\pi i}}{e^x - 1}\,dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{x^{z-1}e^{(z-1)\pi i}}{e^x - 1}\,dx\,. \end{aligned}$$

Für $|w| = \varepsilon < 1$ ist

$$\begin{aligned} \left|\frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1}\right| &= \frac{\exp(\operatorname{Re}((z-1)\operatorname{Log}(-w)))}{|e^w - 1|} \\ &= \frac{|w|^{\operatorname{Re}(z)-1}\exp(-\operatorname{Im}(z)\operatorname{Arg}(-w))}{|e^w - 1|} \le C|w|^{\operatorname{Re}(z)-2} \end{aligned}$$

mit einer von ε unabhängigen Konstanten $C > 0$. Ist $\operatorname{Im}(z) > 1$ so folgt für $\varepsilon \to 0$

$$\left|\int_{\partial_+ D(0,\varepsilon)} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1}\,dw\right| \le 2C\pi\varepsilon^{\operatorname{Re}(z)-1} \to 0\,.$$

Damit ergibt sich für $F(z)$, $z \in \mathbb{H}_1$ mit Hilfe von Lemma 2.3 und der Eulerschen Reflexionsformel (Folgerung 1.5):

$$\begin{aligned} F(z) =& 2i\sin(\pi(z-1)) \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1}\,dx = -2i\sin(z-1)\zeta(z)\Gamma(z) = \\ =& -2\pi i \frac{\zeta(z)\Gamma(z)}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = -2\pi i \frac{\zeta(z)}{\Gamma(1-z)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Auflösung nach $\zeta(z)$ ergibt die Behauptung. □

Da, wie oben bemerkt wurde, die Funktion F auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist und die Funktion Γ eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion ist, erhalten wir:

Folgerung 2.5. *Die Funktion ζ kann zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortgesetzt werden (die wieder mit ζ bezeichnet wird). Diese hat nur eine Polstelle im Punkt 1. Diese Polstelle ist von der Ordnung 1 und hat das Residuum 1.*

Beweis. Die Funktion F ist auf $\mathbb{C}$ holomorph, hat also keine Polstellen. ζ kann also höchstens Polstellen in den Polstellen $\{k\,;\,k \in \mathbb{N}\}$ der Funktion $z \mapsto \Gamma(1-z)$ haben. Diese haben alle die Ordnung 1 (Vergl. Satz 1.1). Da aufgrund der ursprünglichen Definition der Zeta-Funktion diese auf $\mathbb{H}_1$ holomorph ist, müssen die Polstellen $\{k\,;\,2 \le k \in \mathbb{N}\}$ durch Nullstellen von F kompensiert werden. Es bleibt also nur noch 1 als mögliche Polstelle übrig. Für das Residuum in 1 berechnet man unter Verwendung von $\operatorname{Res}(\Gamma, 0) = 1$ und des Residuensatzes:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\zeta, 1) =& \lim_{z\to 1}(z-1)\zeta(z) = \lim_{z\to 1} -(z-1)\Gamma(1-z)\cdot\frac{F(1)}{2\pi i}\\ =&\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,d}}\frac{1}{e^w-1}\,dw = 1\,.\end{aligned}$$

□

Die folgende Funktionalgleichung ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Theorie der Riemannschen Zeta–Funktion.

Satz 2.6 (Funktionalgleichung der Zeta–Funktion). *Für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ gilt*

$$\zeta(z) = 2^z\pi^{z-1}\sin\big(\frac{\pi z}{2}\big)\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\,. \tag{2.6}$$

Beweis. Sei zunächst $0 > s \in \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < d < 1$ sei R_n das achsenparallele Rechteck mit den Eckpunkten

$$-(2n+1)\pi(1+i),\ (2n+1)\pi(1-i),\ (2n+1)\pi(1+i),\ (2n+1)\pi(i-1)$$

und $\gamma_{n,d}$ der in Abbildung 2 skizzierte Weg. In Abwandlung des Beweises zu Satz 2.4 definieren wir

$$\begin{aligned}F_n(s) :=& \lim_{d\to 0}\int_{\gamma_{n,d}}\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}\,dw\\ =&\int_{\partial_+ R_n}\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}\,dw - \int_{(2n+1)\pi}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}}{e^x-1}\,dx + \int_{(2n+1)\pi}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}}{e^x-1}\,dx \qquad (2.7)\\ =&\int_{\partial_+ R_n}\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}\,dw + 2i\int_{(2n+1)\pi}^{\infty}\frac{x^{s-1}\sin((s-1)\pi i)}{e^x-1}\,dx\,.\end{aligned}$$

Man rechnet nach, daß $|e^w-1| > 1/2$ für alle $w \in \partial R_n$ und damit

$$\Big|\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}\Big| \le Cn^{s-1}$$

mit einer positiven Konstante C gilt. Das erste Integral der letzten Zeile von (2.7) ist also von der Größenordnung $O(n^s)$ da der Integrationsweg von der Länge $8(2\pi+1)n$ ist. Auch für das zweite Integral gilt:

$$\Big|2i\int_{(2n+1)\pi}^{\infty}\frac{x^{s-1}\sin((s-1)\pi i)}{e^x-1}\,dx\Big| \to 0 \quad \text{für } n\to\infty\,.$$

Es folgt daher $F_n(s) \to 0$ für $n\to\infty$. Die Funktion $w \mapsto \frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}$ ist auf $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}\,;\, x\ge 0\}$ meromorph mit Polstellen nur in $\pm 2\pi i\mathbb{N}$, die alle von erster Ordnung sind, und deren Residuen sich wie folgt berechnen:

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}, \pm 2k\pi i\Big) = (2\pi k)^{s-1}e^{(s-1)\operatorname{Log}(\mp i)} \text{ für alle } k\in\mathbb{N}\,.$$

Mit dem Residuensatz ergibt sich

$$\begin{aligned}F_n(s) - F(s) =& 2\pi i(2\pi)^{s-1}\big(e^{-(s-1)\pi/2} + e^{(s-1)\pi/2}\big)\sum_{k=1}^{n} k^{s-1}\\ =& 2\pi i 2(2\pi)^{s-1}\cos((s-1)\pi/2)\sum_{k=1}^{n} k^{s-1}\\ =& 2\pi i 2^s\pi^{s-1}\sin(s\pi/2)\sum_{k=1}^{n} k^{s-1}\end{aligned}$$

Wegen $F_n(s) \to 0$ für $n \to \infty$ erhalten wir für $n \to \infty$:

$$-F(s) = 2\pi i 2^s \pi^{s-1}\sin(s\pi/2)\zeta(1-s)$$

Einsetzen in (2.5) und Auflösen nach $\zeta(s)$ liefert die Behauptung für alle negativen reellen Zahlen s. Da beide Seiten von (2.6) meromorph auf $\mathbb{C}$ sind folgt mit Hilfe des Identitätssatzes die Behauptung für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. $\square$

Mit Hilfe der Reflexionsformel für die Gammafunktion von Euler (Folgerung 1.5) und unter Verwendung von $\sin(\pi z) = 2\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)$ erhält man die folgende Fassung der Funktionalgleichung der Zetafunktion:

FOLGERUNG 2.7. *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ gilt:*

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z}\pi^{-z}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(z)\zeta(z)\,. \tag{2.8}$$

Die in 0 holomorph durch 1 ergänzte Funktion

$$z \mapsto h(z) := z\frac{e^z+1}{2(e^z-1)} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z-1}$$

ist gerade und hat daher eine Potenzreihendarstellung der Form

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}\,,$$

wobei die Zahlen B_{2n} die Bernoullischen Zahlen sind. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\zeta(-n) =& (-1)^n\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,d}} w^{-n-2}\left(h(w) - \frac{w}{2}\right)dw\\ =& (-1)^n\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,d}} w^{-n-2}\left(1 - \frac{w}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}w^{2k}\right)dw\,.\end{aligned}$$

Mit dem Residuensatz folgt $\zeta(-2k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\zeta(0) = -1/2$ sowie

$$\zeta(-2k+1) = (-1)^k\frac{B_{2k}}{2k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Insbesondere sind alle diese Werte rationale Zahlen.

Wegen Satz 2.1 kann ζ keine Nullstellen in $\mathbb{H}_1$ besitzen. Hieraus folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung der Zeta–Funktion, daß alle von den *trivialen* Nullstellen $-2k$ (mit $k \in \mathbb{N}$) verschiedenen Nullstellen der Riemannschen Zeta–Funktion in dem *kritischen Streifen* $\{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1\}$ liegen. Die bis heute weder bewiesene noch widerlegte *Riemannsche Vermutung* besagt, daß sie sogar alle auf der *kritischen Linie* $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) = 1/2\}$ liegen.

Unter Verwendung der Verdoppelungsformel von Lagrange (Satz 1.11) zeigen wir eine weitere Fassung der Funktionalgleichung:

FOLGERUNG 2.8. *Durch*

$$\xi(z) := \frac{z(1-z)}{2}\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\big(\frac{z}{2}\big)\zeta(z)$$

ist eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}$ *gegeben mit*

$$\xi(1-z) = \xi(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,. \tag{2.9}$$

BEWEIS. Die Nullstellen des Vorfaktors $z(1-z)$ bei 0 und 1 sowie die Nullstellen von ζ in allen geraden negativen ganzen Zahlen kompensieren die Polstellen (erster Ordnung) der Zetafunktion in 1 und von $\Gamma\big(\frac{z}{2}\big)$ bei 0 sowie die Polstellen von $\Gamma\big(\frac{z}{2}\big)$ in allen negativen geraden ganzen Zahlen. Somit ist ξ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Multiplizieren wir die Verdoppelungsformel

$$\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(z) = 2^{z-1}\Gamma\big(\frac{z}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1+z}{2}\big)$$

mit $\cos\big(\frac{\pi z}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1-z}{2}\big) = \cos\big(\frac{\pi z}{2}\big)\Gamma\big(1-\frac{1+z}{2}\big)$, so erhalten wir unter Verwendung der Reflexionsformel von Euler:

$$\begin{aligned}
\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(z)\cos\big(\frac{\pi z}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1-z}{2}\big) &= 2^{z-1}\Gamma\big(\frac{z}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1+z}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1-z}{2}\big)\cos\big(\frac{\pi z}{2}\big)\\
&= 2^{z-1}\Gamma\big(\frac{z}{2}\big)\pi\frac{\cos\big(\frac{\pi z}{2}\big)}{\sin\big(\pi\frac{1+z}{2}\big)}\\
&= 2^{z-1}\pi\Gamma\big(\frac{z}{2}\big)
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $z(1-z)\pi^{-1-\frac{z}{2}}2^{-z}\zeta(z)$ ergibt für die rechte Seite $\xi(z)$ und wir erhalten mit Folgerung 2.7:

$$\begin{aligned}
\xi(z) &= \frac{1}{2}z(1-z)\pi^{-\frac{1+z}{2}}2^{1-z}\zeta(z)\cos\big(\frac{\pi z}{2}\big)\Gamma(z)\Gamma\big(\frac{1-z}{2}\big)\\
&= \frac{1}{2}(1-z)(1-(1-z))\pi^{-\frac{1-z}{2}}\zeta(1-z)\Gamma\big(\frac{1-z}{2}\big) = \xi(1-z)\,.
\end{aligned}$$

Damit sind die Behauptungen gezeigt. □

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir wie üblich

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z}\,;\, n \leq x\}\,.$$

2. Einige Abschätzungen für die Zetafunktion

Die folgende Darstellung der Zetafunktion wird uns bei Abschätzungen nützlich sein.

LEMMA 2.9. *Für alle* $z \in \mathbb{H}_0 \setminus \{1\}$ *und alle* $N \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{N} n^{-z} + \frac{N^{1-z}}{z-1} - z\int_N^\infty (x-[x])x^{-z-1}dx.$$

Für $N = 1$ *hat man insbesondere*

$$\zeta(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{z-1} - z\int_1^\infty \Big(x-[x]-\frac{1}{2}\Big)x^{-z-1}dx.$$

Beweis. Für Re$z > 1$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\int_N^\infty [x]x^{-z-1}\,dx &= \sum_{n=N}^\infty n \int_n^{n+1} x^{-z-1}dx = \frac{1}{z}\sum_{n=N}^\infty n(n^{-z}-(n+1)^{-z})\\ &= \frac{1}{z}\Big(\sum_{n=N}^\infty \big(n^{-z+1}-(n+1)^{-z+1}\big) + \sum_{n=N}^\infty (n+1)^{-z}\Big)\\ &= \frac{1}{z}\Big(N^{-z+1} + \sum_{n=N+1}^\infty n^{-z}\Big)\\ &= \frac{1}{z}\Big(N^{-z+1} + \zeta(z) - \sum_{n=1}^N n^{-z}\Big)\end{aligned}$$

Wegen

$$N^{1-z} = -\frac{N^{1-z}}{z-1} + \frac{z}{z-1}N^{1-z} = -\frac{N^{1-z}}{z-1} + z\int_N^\infty x^{-z}\,dx$$

folgt hieraus durch Auflösen nach $\zeta(z)$ die erste der beiden behaupteten Darstellungen der Zeta-Funktion für Re$z > 1$. Da beide Seiten dieser Darstellung auf $\mathbb{H}_0 \setminus \{1\}$ holomorph sind, folgt mit Identitätssatz die Gültigkeit der Darstellung auf $\mathbb{H}_0 \setminus \{1\}$. Die zweite Behauptung erhält man aus der ersten für $N = 1$. □

Bekanntlich gilt für Re$z \geq 2$:

$$|\zeta(z)| \leq \sum_{n=1}^\infty n^{-\mathrm{Re}z} \leq \sum_{n=1}^\infty n^{-2} = \zeta(2)\,,$$

so daß die Zetafunktion auf $\overline{\mathbb{H}_2}$ beschränkt ist. Dies gilt auch für alle Ableitungen der Zeta-Funktion, denn wir dürfen nach dem Satz von Weierstraß gliedweise differenzieren und erhalten

$$|\zeta^{(k)}(z)| = \Big|\sum_{n=1}^\infty (-\log n)^k n^{-z}\Big| \leq \sum_{n=1}^\infty n^{-\mathrm{Re}z}|\log n|^k \leq C\sum_{n=1}^\infty n^{-3/2} < \infty$$

unter Verwendung der bekannten Tatsache, daß für alle $\varepsilon > 0$ (hier speziell $\varepsilon = 1/2$) eine von x unabhängige Konstante $C = C_k(\varepsilon) > 0$ existiert mit

$$\forall x \geq 1: \qquad \log x \leq C_k(\varepsilon)x^\varepsilon. \tag{2.10}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit Re$z \geq 2$ gilt ferner

$$|\zeta(z)| \geq 1 - |\zeta(z)-1| \geq 1 - \sum_{n=2} n^{-\mathrm{Re}z} \geq 1 - \sum_{n=2} n^{-2} > 0\,. \tag{2.11}$$

Die Zeta-Funktion ist also auf der Halbebene $\overline{\mathbb{H}_2}$ nach unten beschränkt.

Folgerung 2.10. *Für* $0 < \delta < 1$ *gilt:*

(a) $|\zeta(z)| = O(|z|^{1/(1+\delta)})$ *für* $|z| \to \infty$ *in* $\overline{\mathbb{H}_\delta}$.
(b) *Für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *existiert eine Konstante* $C'_k(\delta) > 0$, *so daß für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* Re$z \geq \delta$ *und* $|\mathrm{Im}z| \geq 1$ *gilt:*

$$\big|\zeta^{(k)}(z)\big| \leq C'_k(\delta)|z|\,.$$

Beweis. Da die Zeta-Funktion und alle ihre Ableitungen auf $\overline{\mathbb{H}_2}$ beschränkt sind, genügt es die Behauptungen für $\delta \leq \mathrm{Re}z \leq 2$ zu beweisen.

(a) Aus der ersten Darstellung der Zetafunktion in Lemma 2.9 folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\delta \leq \mathrm{Re} z \leq 2$ und $|z| \geq 2$ und für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\zeta(z)| \leq & \sum_{n=1}^{N} n^{-\mathrm{Re} z} + \frac{N^{1-\mathrm{Re} z}}{|z|-1} + |z| \int_N^\infty x^{-\mathrm{Re} z - 1}\, dx \\ \leq & N + \frac{2N^{1-\delta}}{|z|} + |z| N^{-\delta} \frac{1}{\mathrm{Re} z} \\ \leq & N + \frac{2N^{1-\delta}}{|z|} + \frac{|z|}{\delta} N^{-\delta}. \end{aligned}$$

Wählen wir speziell $N := \left[|z|^{\frac{1}{1+\delta}}\right] + 1$, so folgt wegen $0 < 1-\delta < 1$:

$$\begin{aligned} |\zeta(z)| \leq & |z|^{\frac{1}{1+\delta}} + 1 + \frac{(|z|^{\frac{1}{1+\delta}} + 1)^{1-\delta}}{|z|-1} + \frac{|z|}{\delta} |z|^{\frac{-\delta}{1+\delta}} \\ \leq & \Big(1 + \frac{1}{\delta}\Big) |z|^{\frac{1}{1+\delta}} + 1 + \frac{|z|^{\frac{1-\delta}{1+\delta}} + 1}{|z|-1} \leq \Big(1 + \frac{1}{\delta}\Big) |z|^{\frac{1}{1+\delta}} + 4\,. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

(b) Wir verwenden die zweite Darstellung der Zeta-Funktion aus Lemma 2.9. Mit

$$f(z) := \int_1^\infty \Big(x - [x] - \frac{1}{2}\Big) x^{-z-1}\, dx$$

gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $\delta \leq \mathrm{Re} z \leq 2$ und $|\mathrm{Im} z| \geq 1$ (da wir Integration und Differentiation vertauschen dürfen):

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z)| = & \Big| \int_1^\infty (-\log x)^k \Big(x - [x] - \frac{1}{2}\Big) x^{-z-1}\, dx \Big| \leq \frac{1}{2} \int_1^\infty (\log x)^k x^{-\mathrm{Re} z - 1}\, dx \\ \leq & \frac{C_k(\delta/2)}{2} \int_1^\infty x^{-1-\frac{\delta}{2}}\, dx = \frac{C_k(\delta/2)}{\delta} \end{aligned}$$

Hierbei ist $C_k(\delta/2)$ wie in (2.10). Für $k = 0$ folgt hiermit die Behauptung durch direkte Abschätzung der zweiten Darstellung von $\zeta(z)$ aus Lemma 2.9[1]. Im Fall $k \geq 1$ erhalten wir durch k-malige Differentiation für $\delta \leq \mathrm{Re} z \leq 2$ und $|\mathrm{Im} z| \geq 1$:

$$|\zeta^k(z)| = \Big| \frac{(-1)^k}{k!(z-1)^{k+1}} - k f^{(k-1)}(z) - z f^{(k)}(z) \Big| \leq k! + \frac{k}{\delta} C_{k-1}(\delta/2) + \frac{|z|}{\delta} C_k(\delta/2)$$

und damit die Behauptung. □

Im folgenden Satz zeigen wir eine untere Abschätzung für den Betrag der Zeta-Funktion.

Satz 2.11. *Die Zeta-Funktion besitzt auf $\overline{\mathbb{H}_1}$ keine Nullstellen. Ferner gibt es eine Konstante $c > 0$ mit*

$$|\zeta(z)| \geq c|z|^{-4}$$

für alle $z \in \mathbb{H}_1$ mit $|\mathrm{Im} z| \geq 1$.

Beweis. (a) *Wir bemerken zunächst:*

$$\forall w \in \mathbb{T}: \qquad \mathrm{Re}(w^4) + 4\mathrm{Re}(w^2) + 3 \geq 0. \tag{2.12}$$

[1] Dieser Fall folgt natürlich auch aus der schärferen Wachstumsabschätzung in (a).

Mit dem Binomialsatz gilt für alle $w \in \mathbb{T}$ (wegen $w\overline{w} = 1$):

$$\begin{aligned} 0 \leq & 16(\mathrm{Re}w)^4 = (w + \overline{w})^4 \\ = & w^4 + \overline{w^4} + 4(w^3\overline{w} + w\overline{w}^3) + 6w^2\overline{w}^2 = 2\mathrm{Re}(w^4) + 8\mathrm{Re}(w^2) + 6. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (2.12).

(b) *Wir zeigen nun:*

$$\forall z \in \mathbb{H}_1 : \qquad |\zeta(z)|^4 \cdot |\zeta(\mathrm{Re}z + 2i\mathrm{Im}z)| \cdot |\zeta(\mathrm{Re}z)|^3 \geq 1\,. \tag{2.13}$$

Sei also $z \in \mathbb{H}_1$ beliebig. Wir schreiben $x := \mathrm{Re}z$ und $y := \mathrm{Im}z$. Mit (2.12) angewendet auf $w := n^{-iy/2}$ folgt:

$$\mathrm{Re}(n^{-2iy}) + 4\mathrm{Re}(n^{-iy}) + 3 \geq 0.$$

Multiplikation mit $a_n n^{-x}$ und Summation über n ergibt

$$\mathrm{Re}(L_\zeta(x + 2iy)) + 4\mathrm{Re}(L_\zeta(x + iy)) + 3L_\zeta(x) \geq 0.$$

Durch Übergang zum Exponenten folgt (2.13). Aus (2.13) folgt durch Division durch $\mathrm{Re}z - 1$:

$$\forall z \in \mathbb{H}_1 : \qquad \left|\frac{\zeta(z)}{\mathrm{Re}z - 1}\right|^4 |\zeta(\mathrm{Re}z + 2i\mathrm{Im}z)||\zeta(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z - 1)| \geq \frac{1}{\mathrm{Re}z - 1}\,. \tag{2.14}$$

Dies zeigt schon, daß ζ keine Nullstelle auf der Geraden $\mathrm{Re}z = 1$ haben kann: Für $1 + iy$ mit $y \neq 0$ und $\zeta(1 + iy) = 0$ würde man für die linke Seite von (2.14) für $\mathrm{Im}z = y$ und $\mathrm{Re}z = x \to 1$ nämlich den endlichen Grenzwert $|\zeta'(1+iy)| \cdot |\zeta(1+2iy)|$ erhalten, während die rechte Seite gegen ∞ konvergiert.

(c) Beim Beweis der unteren Abschätzung können wir uns auf die Menge

$$S := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 1 < \mathrm{Re}z \leq 2, |\mathrm{Im}z| \geq 1\}$$

beschränken, da $|\zeta|$ auf $\mathbb{H}_2$ von 0 weg beschränkt ist. Da die Zeta-Funktion in 1 eine Polstelle der Ordnung 1 besitzt, ist die auf $(1, 2]$ definierte, positive, nullstellenfreie Funktion

$$x \mapsto \zeta(x)(x - 1)$$

in 1 stetig durch einen von 0 verschiedenen Wert ergänzbar und daher nach oben und nach unten durch positive Konstanten beschränkt. Mit (2.13) erhalten wir für alle $z = x + iy \in S$:

$$\frac{|x - 1|^{3/4}}{|\zeta(x + 2iy)|^{1/4}} \leq (\zeta(x)(x - 1))^{3/4}|\zeta(z)|.$$

Für $|\zeta(x + 2iy)|^{1/4}$ haben wir nach Folgerung 2.10 eine Abschätzung nach oben

$$|\zeta(x + 2iy)|^{1/4} \leq K_0|z|^{1/4} \leq K_1|y|^{1/4}$$

auf S mit positiven Konstanten K_0, K_1. Insgesamt erhalten wir für alle $z = x + iy \in S$

$$|\zeta(z)| \geq K_2(x - 1)^{3/4}|y|^{-1/4} \tag{2.15}$$

mit einer Konstanten $K_2 > 0$. Ebenfalls nach Folgerung 2.10 gilt für alle $z \in S$

$$|\zeta'(z)| \leq K_3|z| \leq K_4|y|$$

mit Konstanten $K_3, K_4 > 0$. Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ so klein, daß

$$K_2 - K_4\varepsilon^{1/4} > 0 \tag{2.16}$$

gilt.

(d) Sei nun $z = x + iy \in S$ beliebig. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $x \geq x_0 := 1 + \varepsilon|y|^{-5}$. Dann folgt mit (2.15)

$$|\zeta(z)| \geq K_2(x - 1)^{3/4}|y|^{-1/4} \geq K_2\varepsilon^{3/4}|y|^{-15/4}|y|^{-5} = K_2|y|^{-4} \geq \varepsilon^{3/4}\frac{K_2}{|z|^4}.$$

(ii) Im Fall $x < x_0$ beachten wir

$$\zeta(z) = \zeta(x_0 + iy) - \int_x^{x_0} \zeta'(\xi + iy)\, d\xi$$

und erhalten mit (2.15) und der oberen Abschätzung für $|\zeta'(\xi + iy)|$:

$$\begin{aligned}|\zeta(z)| \geq& |\zeta(x_0 + iy)| - \Big| \int_x^{x_0} \zeta'(\xi + iy)\, d\xi \Big| \geq |\zeta(x_0 + iy)| - \int_x^{x_0} |\zeta'(\xi + iy)|\, d\xi \\ \geq& K_2(x_0 - 1)|y|^{-1/4} - K_4(x_0 - 1)|y| = (K_2\varepsilon^{3/4} - K_4\varepsilon)|y|^{-4} \\ \geq& (K_2\varepsilon^{3/4} - K_4\varepsilon)|z|^{-4}.\end{aligned}$$

Damit ist die untere Abschätzung vollständig bewiesen (mit $c = K_2\varepsilon^{3/4} - K_4\varepsilon > 0$ nach Wahl von ε in (2.16)). $\square$

Für die logarithmische Ableitung der Zetafunktion erhält man mit den Abschätzungen aus Folgerung 2.10 und Satz 2.11:

FOLGERUNG 2.12. *Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\left| \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \right| \leq C|\mathrm{Im} z|^5 \quad \textit{und} \quad \left| \frac{d}{dz} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \right| \leq C|\mathrm{Im} z|^{10}$$

für alle $z \in \mathbb{H}_1$ mit $|\mathrm{Im} z| \geq 1$.

3. Der Primzahlsatz

In den Übungen wird für die logarithmische Ableitung der Zetafunktion gezeigt (Aufgabe 2.3):

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n n^{-z} \qquad (\mathrm{Re} z > 1),$$

wobei die Folge $(\Lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert ist durch

$$\Lambda_n : \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^k \text{ für eine Primzahl } p \text{ und ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörige summatorische Funktion $\psi : (0, \infty) \to [0, \infty)$ mit

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda_n \qquad (x > 0)$$

wird *Tschebyscheff-Funktion* genannt. Ihr asymptotisches Verhalten soll im folgenden untersucht werden. Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. Die Tschebyscheffsche Thetafunktion ist definiert durch

$$\theta(x) := \sum_{p \in \mathbb{P},\, p \leq x} \log p \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Zwischen dem Wachstumsverhalten von ψ und θ besteht folgender Zusammenhang:

LEMMA 2.13. $\psi(x) = \theta(x) + O(\sqrt{x} \log x)$ *für $x \to \infty$.*

Beweis. Mit $A(x) := \{p^k\,;\, p \in \mathbb{P}, 2 \le k \in \mathbb{N}, p^k \le x\}$ gilt

$$\begin{aligned}\psi(x) = \sum_{n\le x, n\in\mathbb{N}} \Lambda_n \le \sum_{p\le x,\, p\in\mathbb{P}} \log p + \sum_{n\le x, n\in A(x)} \Lambda_n \\ \le \theta(x) + \sum_{p\in\mathbb{P}, 2\le k\in\mathbb{N}, p^k\le x} \log p \\ \le \theta(x) + \sum_{p\in\mathbb{P}, 2\le k\in\mathbb{N}, p^k\le x} \log x \\ \le \theta(x) + N(x)\log x\,,\end{aligned}$$

wobei $N(x)$ die Anzahl der Elemente von $A(x)$ bezeichne. In den Übungen (Aufgabe 2.4) wird gezeigt, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$N(x) \le C\sqrt{x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Zum Abschluß dieses Kapitels soll der folgende Primzahlsatz bewiesen werden:

Satz 2.14 (Primzahlsatz). *Es gilt* $\theta(x) = \sum_{p\le x,\, p\in\mathbb{P}} \log p = x + o(x)$ *für* $x \to \infty$.

Wegen Lemma 2.13 ist die Aussage des Primzahlsatzes äquivalent zu

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda_n = x + o(x) \qquad \text{für } x \to \infty.$$

Man beachte hierbei, daß $\sqrt{x}\log x = o(x)$ für $x \to \infty$ gilt.

Meist wird der Primzahlsatz in folgender Form angegeben:

Satz 2.15 (Primzahlsatz). *Mit* $\pi(x) := |\{p \in \mathbb{P}\,;\, p \le x\}|$ *gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1\,.$$

Beweis. Wir zeigen, wie Satz 2.15 aus Satz 2.14 folgt: Definieren wir $r(x)$ durch $\theta(x) = x(1 + r(x))$, so gilt nach Satz 2.14 $r(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Wegen der Monotonie der Logarithmusfunktion hat man für alle $x > 0$

$$\theta(x) = \sum_{p\in\mathbb{P},\, p\le x} \log p \le \sum_{p\in\mathbb{P},\, p\le x} \log x = \pi(x)\log x$$

und somit

$$\pi(x) \ge \frac{x(1 + r(x)}{\log x}$$

also auch

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \ge 1\,.$$

Für eine obere Abschätzung beachten wir, daß für $0 < q < 1$ und $x > 1$ die triviale Ungleichung

$$\pi(x^q) \le x^q$$

gilt und somit

$$\theta(x) \ge \sum_{x^q\le p\le x,\, p\in\mathbb{P}} \log p \ge \sum_{x^q\le p\le x,\, p\in\mathbb{P}} \log x^q = q(\pi(x) - \pi(x^q)) \ge q(\pi(x) - x^q).$$

Auflösen nach $\pi(x)$ ergibt die Ungleichung

$$\pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{q \log x} + x^q = \frac{x}{q \log x}(1 + r(x)) + x^q.$$

Für $x > e$ und mit speziell $q = 1 - (\log x)^{-1/2}$ folgt nach etwas Rechnung

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x}(1 + R(x))$$

mit

$$R(x) = -1 + (1 + r(x))\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)^{-1} + \frac{\log x}{x^{1/\sqrt{\log x}}} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Damit folgt

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 1$$

und damit die Behauptung. □

Zum Beweis des Primzahlsatzes 2.14 benötigen wir noch den folgenden Tauber-Satz:

Satz 2.16. *Gegeben sei eine Folge* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *in* $[0, \infty)$*, so daß die Reihe*

$$D(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-z}$$

für alle $z \in \mathbb{H}_1$ *konvergiert. Es sei weiter vorausgesetzt, daß gilt:*

(a) *Die Funktion* $z \mapsto (z-1)D(z)$ *besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf eine offene Menge* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *mit* $\overline{\mathbb{H}_1} \subset \Omega$ *und* D *hat in* 1 *eine Polstelle der Ordnung 1 und vom Residuum* $\rho :=\mathrm{Res}(D, 1) > 0$.

(b) *Es gibt Konstanten* $C, \kappa \in (0, \infty)$ *mit*

$$|D(z)| \leq C|\mathrm{Im} z|^\kappa \quad \textit{und} \quad |D(z)| \leq C|\mathrm{Im} z|^\kappa$$

für alle $z \in \mathbb{H}_1$ *mit* $|\mathrm{Im} z| \geq 1$.

Dann gilt für die summatorische Funktion $x \mapsto A_0(x) := \sum_{n\leq x} a_n$*:*

$$A_0(x) = \sum_{n\leq x} a_n = \rho x(1 + r(x))$$

mit

$$r(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt[N]{\log x}}\Big) \qquad \textit{für } x \to \infty.$$

für ein geeignetes $N = N(\kappa)$ *(z.B.* $N(\kappa) := 2^{[\kappa]+2}$*).*

Herleitung des Primzahlsatzes aus dem Taubersatz 2.16: Wir zeigen, daß die Funktion

$$z \mapsto D(z) := -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^\infty \Lambda_n n^{-z} \qquad (z \in \mathbb{H}_1)$$

die Voraussetzungen zu Satz 2.16 erfüllt. Die Abschätzungen in Voraussetzung (b) sind nach Folgerung 2.12 erfüllt mit $\kappa = 10$ (und somit $N(\kappa) = 2^{12}$). Da die Zetafunktion sich zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzen läßt mit nur einer Polstelle in 1 vom Residuum 1, hat D eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit Polstellen höchstens in 1 und den Nullstellen der Zetafunktion. Es ist $\zeta(z) = (z-1)^{-1} + h(z)$ mit einer ganzen Funktion h und somit

$$(z-1)D(z) = -(z-1)\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -(1-z)\frac{-(z-1)^{-2} + h'(z)}{(z-1)^{-1} + h(z)} \to 1 \quad \text{für } z \to 1.$$

D hat daher in 1 eine Polstelle der Ordnung 1 vom Residuum $\rho = 1$. Da die Zetafunktion auf $\overline{\mathbb{H}_1}$ keine Nullstellen besitzt, gibt es zu jedem $z \in \overline{\mathbb{H}_1}$ eine offene Umgebung $U(z)$, auf der die Funktion $z \mapsto (z-1)D(z)$ holomorph ist. Insbesondere ist diese Funktion also auf der offenen Obermenge $\Omega := \bigcup_{z \in \overline{\mathbb{H}_1}} U(z)$ von $\overline{\mathbb{H}_1}$ holomorph. D erfüllt somit die Bedingungen aus Satz 2.16 und es folgt mit $N = 2^{12}$ aus diesem Satz:

$$A_0(x) = \psi(x) = x(1 + r(x)) \quad \text{mit } r(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt[N]{\log x}}\Big) \quad \text{für } x \to \infty.$$

Hieraus folgt nun der Primzahlsatz 2.14. □

Beweis des Taubersatzes 2.16. Wir definieren für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x > 0$:

$$A_k(x) := \frac{1}{k!} \sum_{n \le x} a_n (x-n)^k = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-n)^k \chi_{[n,\infty)}(x)\,.$$

Für $k = 1$ ist dies die in der Formulierung des Taubersatzes angegebene Funktion. Durch Integration sieht man:

$$\int_1^x A_k(t)\,dt = A_{k+1}(x) \quad \text{und somit } A'_{k+1}(x) = A_k(x) \quad \text{für alle } x > 0, k \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x > 0$ definieren wir $r_k(x)$ durch

$$A_k(x) = \frac{\rho x^{k+1}}{(k+1)!}(1 + r_k(x)). \tag{2.17}$$

Wenn wir nun für $k \in \mathbb{N}_0$, $N \in \mathbb{N}$ und $x \to \infty$ die beiden folgenden Aussagen beweisen können

$$r_{k+1}(x) = O(1/\sqrt[N]{\log x}) \quad \Longrightarrow \quad r_k(x) = O(1/\sqrt[2N]{\log x}) \tag{2.18}$$

und

$$k > \kappa + 1 \quad \Longrightarrow \quad r_k(x) = O(1/\log x), \tag{2.19}$$

so folgt

$$r_k(x) = O(1/\sqrt[N_k]{\log x}) \quad \text{mit} \quad N_k := \begin{cases} 1 & \text{für } k > \kappa + 1 \\ 2^{[\kappa]+2-k} & \text{für } k \le \kappa + 1, \end{cases}$$

so folgt für $k = 0$ die Behauptung. □

Es müssen also nun noch die beiden Aussagen (2.18) und (2.19) unter den Voraussetzungen des Taubersatzes bewiesen werden.

Beweis zu (2.18). Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $C_k > 0$ und ein $x_0 > 1$, so daß

$$\forall x \ge x_0 : \qquad |r_{k+1}(x)| \le C_k (\log x)^{-1/N}. \tag{2.20}$$

Da die Funktion A_k monoton wachsend ist gilt für alle $x \in\in (e, \infty)$ und $h \in [-1, 1]$ unter Verwendung von (2.17):

$$\begin{aligned} \frac{\rho h x^{k+2}}{(k+1)!}(1 + r_k(x)) = xhA_k(x) &\le \int_x^{x(1+h)} A_k(t)\,dt = A_{k+1}(x+h) - A_{k+1}(x) \\ &= \frac{\rho x^{k+2}}{(k+2)!}\big((1+h)^{k+2}(1 + r_{k+1}(x(1+h))) - (1 + r_{k+1}(x))\big) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Wegen

$$0 \ne \rho = \operatorname{Res}(D, 1) = \lim_{x \to 1^+} hD(x)\,.$$

Da $D(x) > 0$ für alle $x > 1$ gilt, ist ρ eine positive reelle Zahl. Dividieren wir nun (2.21) durch die positive reelle Zahl $\frac{\rho x^{k+2}}{(k+1)!}$ und subtrahieren wir anschließend h, so erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} hr_k(x) &\leq \frac{1}{k+2}\big((1+h)^{k+2}(1+r_{k+1}(x(1+h))) - (1+r_{k+1}(x))\big) - h \\ &= \frac{1}{k+2}\big((1+h)^{k+2}r_{k+1}(x(1+h)) - r_{k+1}(x)\big) + \frac{1}{k+2}((1+h)^{k+2} - 1 - (k+2)h) \\ &= \frac{1}{k+2}\big((1+h)^{k+2}r_{k+1}(x(1+h)) - r_{k+1}(x)\big) + \frac{1}{k+2}\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}h^j \end{aligned}$$

und hieraus mit Hilfe von (2.20)

$$hr_k(x) \leq \frac{2^{k+2}}{k+2}(C(\log(1+h) + \log x)^{-1/N} + (\log x)^{-1/N} + h^2) \tag{2.22}$$

Für hinreichend großes $x \leq x_1 \geq x_0$ ist $h := (\log x)^{-\frac{1}{2N}} < 1/2$ und es folgt nach Division durch h (wegen $h > 0$) die Abschätzung

$$r_k(x) \leq \frac{K_k}{\sqrt[2N]{\log x}}$$

mit eine nur von k abhängigen Konstante $K_k > 0$. Um auch ein Abschätzung für $-r_k(x)$ zu erhalten, setzen wir $h := -(\log x)^{-\frac{1}{2N}} < 1/2$ und erhalten aus (2.22) nach Division durch $-h$ wegen $1 + h \leq 1/2$ und $\log(1+h) + \log x \geq -\log 2 + \log x \leq \frac{1}{2}\log x$ für $x \geq \max 4, x_1$:

$$-r_k(x) \leq \frac{K_k'}{\sqrt[2N]{\log x}}$$

mit einer ebenfalls nur von k abhängigen Konstante K_k'. Damit ist (2.18) bewiesen. □

Beweis zu (2.19). Mit den Übungsaufgaben 2.6 - 2.8 folgt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $s, x > 0$

$$A_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz. \tag{2.23}$$

Die in (2.19) vorausgesetzte Abschätzung

$$|D(z)| \leq C|\mathrm{Im}|^\kappa \qquad (z \in \mathbb{H}_1,\ |\mathrm{Im}z| \geq 1)$$

gilt aus Stetigkeitsgründen auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}z \geq 1$ und $|\mathrm{Im}z| \geq 1$. Es gibt also eine Konstante $C' > 0$ mit

$$\left|\frac{D(z)}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\right| \leq C'|\mathrm{Im}z|^{\kappa-k-1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}z \geq 1$ und $|\mathrm{Im}z| \geq 1$. Insbesondere folgt für $k > \kappa + 1$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}z \geq 1$ und $|\mathrm{Im}z| \geq 1$:

$$\left|\frac{D(z)}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\right| \leq C'|\mathrm{Im}z|^{-2}.$$

Wir verlegen nun den Integrationsweg teilweise auf die Gerade $\mathrm{Re}z = 1$. Mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy folgt aus (2.23)

$$A_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz.$$

Hierbei sei γ der Weg der von $1 - i\infty$ über $1 - i$, $2 - i$, $2 + i$, $1 + i$ nach $1 + i\infty$ verläuft.

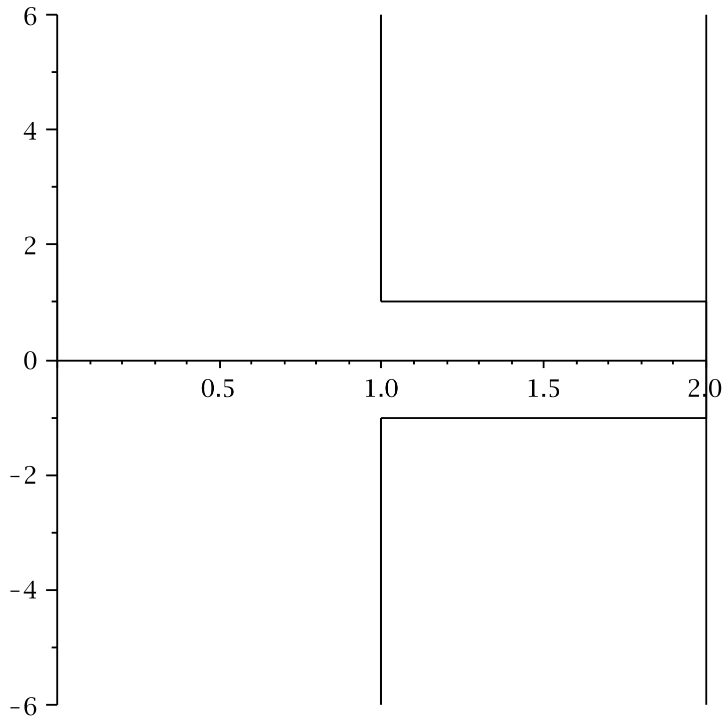

Abbildung 2. Der Verlauf des Integrationsweges γ

Wir haben also die fünf Teilintegrale

$$\begin{aligned} I_1 :=& \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1-i} \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz,\\ I_2 :=& \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i}^{2-i} \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz,\\ I_3 :=& \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i}^{2+i} \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz,\\ I_4 :=& \frac{1}{2\pi i}\int_{2+i}^{1+i} \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz,\\ I_5 :=& \frac{1}{2\pi i}\int_{1+i}^{1+i\infty} \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz \end{aligned}$$

abzuschätzen. Für I_1, I_5 folgt unter Verwendung von Übungsaufgabe 2.5

$$|I_1| + |I_5| = O\Big(\frac{x^{k+1}}{\log x}\Big) \qquad (x \to \infty)$$

Sie tragen also nur zum Restglied bei. Für I_3 liefert jedoch diese Übungsaufgabe nur die Abschätzung

$$|I_3| \le O\Big(\frac{x^{k+2}}{\log x}\Big) \qquad (x \to \infty),$$

was nicht mehr von der gewünschten Größenordnung ist. Da jedoch nach Voraussetzung die Funktion $z \mapsto (z-1)D(z)$ auf eine offene Obermenge Ω von $\overline{\mathbb{H}_1}$ holomorph fortsetzbar ist, gibt es ein $s \in (0,1)$, so daß das abgeschlossene achsenparallele Rechteck mit den Eckpunkten $s-i, 2-i, 2+i, s+i$ in Ω enthalten ist. Mit dem Residuensatz folgt

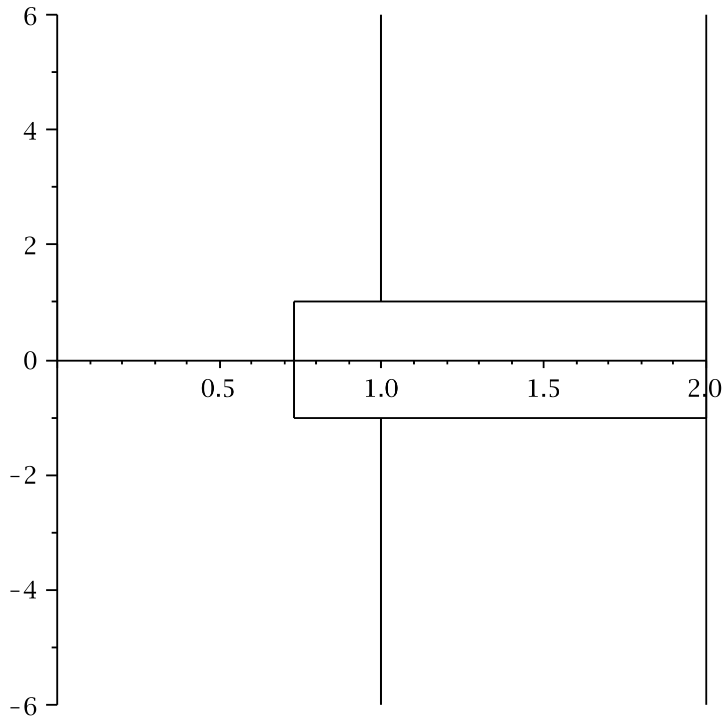

Abbildung 3. Die Abänderung des Integrationsweges γ

$$I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde\gamma} \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz + \operatorname{Res}\Big(\frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}, 1\Big)$$

wobei $\tilde\gamma$ der Polygonzug ist, der von $1-i$ über $s-i$ und $s+i$ nach $1+i$ verläuft. Auf den vertikalen Anteil des Integrals ist nun Übungsaufgabe 2.5 wieder anwendbar. Er liefert nur einen Beitrag der Größenordnung $O\big(\frac{k+s}{\log x}\big) = o\big(\frac{k+1}{\log x}\big)$ (wegen $0 < s < 1$). Durch direkte Abschätzung sieht man, daß die horizontalen Anteile des Integrals von der Größenordnung $O\big(\frac{k+1}{\log x}\big)$ sind und somit ebenfalls nur zum Restglied bei tragen. Für das Residuum berechnet man

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}, 1\Big) = \frac{\rho}{(k+1)!}x^{k+1}.$$

Dies ist gerade der Vorfaktor in (2.17). Damit ist der noch ausstehende Beweis für (2.19) erbracht und sowohl der Taubersatz als auch der Primzahlsatz vollständig gezeigt. □

Zur Theorie und Geschichte der Riemannschen Zeta–Funktion siehe [**26, 55, 58, 87, 102**]. Auch einige der im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher zur Funktionentheorie haben zum Teil umfangreiche Abschnitte über die Riemannsche Zeta–Funktion. Zur Theorie analytischer Funktionen in der Zahlentheorie verweisen wir insbesondere auch auf [**40, 63**].

Übungsaufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } n = p^k \text{ fur eine Primzahl } p \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ konvergiert auf $\mathbb{H}_1$ kompakt und punktweise absolut gegen eine auf $\mathbb{H}_1$ holomorphe Funktion L_ζ.
(b) Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ gilt $\zeta(z) = \exp(L_\zeta(z))$.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie zunächst

$$\forall z \in \mathbb{H}_1 : \qquad h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_m^{-kz} = \sum_{m=1}^{\infty} -\log(1 - p_m^{-z})\,.$$

Hierbei sei $(p_m)_{m=1}^{\infty}$ die Folge der der Größe nach durchnumerierten Primzahlen und log der Hauptzweig der Logarithmusfunktion.

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie, daß für die logarithmische Ableitung der Zeta-Funktion in $\mathbb{H}_1$ gilt

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \log(p_n) \sum_{k=1}^{\infty} p_n^{-kz}$$

mit absoluter Konvergenz. Hierbei sei $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ die Folge der der Größe nach durchnumerierten Primzahlen.
Hinweis: Erinnern Sie sich an Lemma 1.7 der Vorlesung und die Produktdarstellung der Zeta-Funktion.

Aufgabe 2.3. Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ gilt mit

$$\Lambda_n : \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^k \text{ für eine Primzahl } p \text{ und ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für die logarithmische Ableitung der Zetafunktion:

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n n^{-z}$$

Aufgabe 2.4. Für reelles $x > 0$ sei $A(x)$ die Menge aller p^n von Primzahlpotenzen der Ordnung $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, mit $p^n \leq x$. Sei ferner $N(x)$ die Anzahl der Elemente von $A(x)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $N(x) \leq C\sqrt{x}$ für alle $x > 0$.
Hinweis: Zeigen Sie hierzu:

(a) Für alle Primzahlpotenzen $p^n \leq x$ mit $n \geq 2$ gilt $n \leq \frac{\log x}{\log 2}$.
(b)

$$N(x) \leq \sum_{2 \leq n \leq \frac{\log x}{\log 2}} \sqrt[n]{x} \leq \sqrt{x} + \sum_{3 \leq n \leq \frac{\log x}{\log 2}} \sqrt[n]{x}.$$

Schätzen Sie anschließend geeignet ab.

Aufgabe 2.5. Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f \in C^1(a,b)$ eine auf (a,b) absolut integrierbare, beschränkte Funktion, für die auch die Ableitung f' absolut auf (a,b) integrierbar ist. Zeigen Sie: Für alle $x > 0$ ist auch die Funktion $t \mapsto f(t)x^{it}$ auf (a,b) absolut integrierbar und es gibt eine von Konstante $C = C(f) > 0$, so daß für alle $x > 0$ gilt

$$\left| \int_a^b f(t)x^{it}\,dt \right| \leq \frac{C}{\log x}.$$

Hinweis: Partielle Integration.

Aufgabe 2.6. Zeigen Sie, daß unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Satz 2.16 für $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$ und $s > 1$ gilt: Das uneigentliche Linienintegral

$$\begin{aligned} I_k(s,x) :=& \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{D(z)x^{z+k}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz \\ :=& i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(s+it)x^{z+k}}{(s+it)(s+it+1)\cdot\ldots\cdot(s+it+k)}\,dt \end{aligned}$$

ist absolutkonvergent und es gilt

$$I_k(s,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^k \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{\frac{x}{n}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz\,.$$

Aufgabe 2.7. Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}$, $s > 0$ und $0 < a \leq 1$ das uneigentliche Linienintegral

$$J_k(s,a) := \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{a^z}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz.$$

Aufgabe 2.8. Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}$, $s > 0$ und reelles $a \geq 1$ das uneigentliche Linienintegral

$$J_k(s,a) := \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{a^z}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k)}\,dz.$$

Aufgabe 2.9. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^z}{z^2}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < x < 1 \\ \log x & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

[1] Niels Hendrik Abel, *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*, Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang **1**, Bind 2, (1823) 11-27.
[2] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*. 3rd edition, McGraw-Hill, 1979.
[3] Ernst Albrecht, Funktionentheorie, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, SS 2007.
[4] É. Amar et É. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, Paris 2004.
[5] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*. Cambridge University Press, 1999.
[6] E. Artin, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Leipzig 1931.
[7] Richard Askey, *The q-gamma and the q-beta functions*, Applicable Analysis **8** (1978) 125–141.
[8] Richard Askey, *Ramanujan's extensions of the Gamma and Betafunctions*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), no. 5, 346–359.
[9] H. Behnke und F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Nachdruck der 3. Auflage, Springer, 1979.
[10] C. A. Berenstein and R. Gay, *Complex Analysis: An Introduction*, Springer, 1991.
[11] C. A. Berenstein and R. Gay, *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*, Springer, 1995.
[12] Lenart Bergren, Jonathan Borwein and Peter Borwein, *Pi: A Source Book*, Springer—Verlag New York 1997.
[13] Friedrich Wilhelm Bessel *Ueber die Zahlenfacultäten*, Königsberger Archiv f. Naturwiss. und Math. **1** (1812) 241–270, Abhandlungen, Band II, 342–352, Leipzig 1875.
[14] R. P. Boas, *Entire Functionss*, Academic Press, 1954.
[15] R. P. Boas, *Invitation to Complex Analysis*, Random House, 1987.
[16] Harald Bohr und Johannes Mollerup, *Lærebog i matematisk Analyse*, Vol. III, J. Gkellerup, Kopenhagen 1922.
[17] R. B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis, Vol.* I. Birkhäuser, 1979.
[18] Ronald Calinger, *Leonhard Euler: The first St. Petersburg Years (1727–1741)*, Historia Mathematica **2** (1996) 121-166.
[19] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*. Springer, 1973.
[20] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*, II. Springer, 1995.
[21] August Leopold Crelle *Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Fakultäten, nach einer neuen Entwickelungs–Methode; vorbereitet durch einen Versuch einer critischen Untersuchung über die Potenzen, Logarithmen und Exponential–Größen und begleitet von Bemerkungen und Erörterungen die Theorie der Winkel–Functionen betreffend*, Reimer Berlin 1823.
[22] August Leopold Crelle, *Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques*, J. Reine und Angew. Math. **7** (1831) 253–305, 314–380.
[23] August Leopold Crelle, *Eine Anwendung der Fakultätentheorie und der allgemeinen Taylorschen Reihe auf die Binomialkoeffizienten*, Abh. Akad. Berlin (math.) (1843), 1–48.
[24] Philip J. Davis, *Leonhard Euler's Integral*, American Mathematical Monthly **66** (1959) 849–869.
[25] Jacques Dutka, *The early history of the factorial function*, Arch. Hist. Exact Sci. **43** (1993), 225–249.
[26] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta function*, Academic Press, 1974.
[27] Leonhard Euler, *De progressionibus transcendentibus, sev qvarvm termini generales algebrice dari neqvevnt*, Commentarii academiae scientarum imperalis Petropolitanae **5** (1730-1731), 36-57.
[28] Leonhard Euler, *Variae observationes circa series infinitas*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **9** (1744) 160–188.
[29] Leonhard Euler, *Introductio in analysis infinitorum*, 1748, T. 1, Repr. *Opera omnia*, Ser. 1, Band 8.
[30] Leonhard Euler, *De curva hypergeometrica hac aequatione expressa* $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot x$, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **13** (1769), 3-66.

[31] Leonhard Euler, *Evolutio formulae integralis* $\int x^{f-1}dx(lx)^{\frac{m}{n}}$ *integratione a valore* $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extensa*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **16** (1772), 91-139.

[32] Leonhard Euler, *Considérations sur quelques formules intégrales, dont les valeurs peuvent être exprimées, en certains cas, par la quadrature du cercle*, in *Opera posthuma* **1**, 408–438, 1862.

[33] Leonhard Euler, *De valoribus integralium a termino variabilis* $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensorum*, (M. S. Academiae exhib. d. 30 Aprilis 1781), in *Institutiones calculi integralis*, **4** (1794) 337–345. (Deutsche Übersetzung in [**34**]).

[34] Leonhard Euler, *Zur Theorie der komplexen Funktionen*, ausgewählt, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Adolf Pawlowitsch Juschkewitsch, Herausgeber H. Wußing, Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften **261**, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1983.

[35] Emil A. Fellmann, *Leonhard Euler*, rororo Monographie **387**, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Hamburg 1995.

[36] Reinhard Finster und Gerd van den Heuvel, *Gottfried Wilhelm Leibniz*, rororo Monographie **481**, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Hamburg 1990.

[37] W. Fischer und I. Lieb, *Funktionentheorie*, achte Auflage, Vieweg, 2003.

[38] W. Fischer und I. Lieb, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*. Vieweg, 1988.

[39] O. Forster, *Riemannsche Flächen*. Springer, 1977.

[40] E. Freitag und R. Busam, *Funktionentheorie*. 4. Auflage, Springer, 2006.

[41] Jean–Pierre Friedelmeyer, *August Leopold Crelle, 1780-1855*, In: *Mathematics in Berlin*, Eds. H.G.W. Begehr, H. Koch, J. Kramer, N. Schappacher, E.-J. Thiele, on behalf of the Berliner Mathematische Gesellschaft, Birkhäuser Verlag, Berlin - Basel - Boston 1998.

[42] T. W. Gamelin, *Complex Analysis*. Springer, 2001.

[43] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*. Academic Press, 1981.

[44] D. Gaşpar şi N. Suciu, *Funcţii de variablă complexă*, Editura Mirton, Timişoară 1995.

[45] Carl Friedrich Gauss, *Disqusitiones generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + etc.$$

Pars prior. Commentationes Societatis regiae scientarum Gottingensis recentiores 2, 1811-1813 (1813), commentationes classis mathematicae, 46 S. In *Carl Friedrich Gauss Werke*, Band 3, p. 123–162, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1876.

[46] Carl Friedrich Gauss, *Determinatio seriae nostre per aequationem differentialem secundi ordinis*, Zweiter Teil zu [**45**], In *Carl Friedrich Gauss Werke*, Band 3, p. 207–229, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1876.

[47] Carl Friedrich Gauss, *Anzeige* zu [**45**], Göttingische gelehrte Anzeigen, 1812 Februar 10, Stück 24, 233-240. In *Carl Friedrich Gauss Werke*, Band 3, p. 197–202, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1876.

[48] Carl Friedrich Gauss, *Tagebuch (Notizenbuch)*, abgedruckt und mit Erläuterungen versehen in *Carl Friedrich Gauss Werke*, Band 10, Erste Abteilung, p. 485–572, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1917.

[49] Carl Friedrich Gauss, *Mathematisches Tagebuch*, Mit einer historischen Einführung von Kurt-R. Biermann, Durchgesehen und mit Anmerkungen versehen von Hans Wußing und Olaf Neumann, Oswalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften **256**, 5. vollständig überarbeitete Auflage, Verkag Harri Deutsch 2005.

[50] Christoph Gudermann, *Combinatorisch–analytische Abhandlung, enthaltend den Beweis der vier Summationsformeln Band 3. Heft 2. S. 207. d. Journals*, J. Reine und Angew. Math. **3** (1829) 401–413.

[51] Christoph Gudermann, *Theorie der Modular–Functionen und der Modular–Integrale*, J. Reine und Angew. Math. **18** (1838) 1–54, 142–175, 220–258, 303–364, **19** (1839) 46–83, 119–184, 244–285, **20** (1840) 62–87, 103–167, **21** (1840) 240–292, **23** (1842) 301–353, **25** (1843) 281–394.

[52] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, 3 Bände. Wiley, 1974.

[53] Otto Hölder, *Über die Eigenschaft der Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen*, Math. Annalen **28** (1886) 1–13.

[54] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 2. Auflage. North Holland, 1973.

[55] A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, Wiley-Interscience, New-York 1985.

[56] Hans Niels Jahnke, *Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts– Cauchys Analysis in der Sicht des Mathematikers Martin Ohm*, Arch. Hist. Exact Sci. 37 (1987) 101–182.

[57] Adolf Pawlowitsch Juschkewitsch, *Mathematik im Mittelalter*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964.

[58] A.A. Karatsuba and S.M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, Translated from the Russian by Neal Koblitz, Walter de Gruyter, Berlin-New York 1992.

[59] Christian Kramp, *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, Leipzig und Straßburg 1798.

[60] Christian Kramp, *Élémens d'arithméthique universelle*, Köln 1808.

[61] Christian Kramp, *Analyse transcendante. Mémoire sur les facultés numériques*, Annales de Mathématiques pures et appliquées **3** (1812–1813) 1–12, 114-132, 325-344.

[62] K. Kodaira, *Introduction to Complex Analysis*. Cambridge University Press, 1984.

[63] E. Krätzel *Analytische Funktionen in der Zahlentheorie*, Teubner-Texte zur Mathematik Band **139**, Teubner, 2000.

[64] S. G. Krantz, *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*. Second edition. The Mathematical Association of America, 2004.

[65] Sylvestre François Lacroix, *Traité des différences et des séries, faisant suite au traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Chez J.B.M. Duprat, Libraire pour les Mathématiques, Paris 1800.

[66] Josephe-Louis Lagrange, *Sur une nouvelle espèce de calcul relativ à la différentiation et à l'intégration des quantitées variables*, Extraits des receuils de l'académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin (1772), 441-476.

[67] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*. Dover Publications, 1972.

[68] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Mathematische Schriften.* Bd. I: *Briefwechsel zwischen Leibniz und Oldenburg, Collins, Newton, Galloys, Vitale Giordano.* Bd. II: *Briefwechsel zwischen Leibniz, Hugens van Zulichem und dem Marquis de l'Hospital.* Herausgegeben von C. I. Gerhardt. Zwei Bände in einem gebunden, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1962.

[69] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Mathematische Schriften.* Bd. III/1: *Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli.* Herausgegeben von C. I. Gerhardt, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1962.

[70] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Mathematische Schriften.* Bd. IV: *Briefwechsel zwischen Leibniz, Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini, Hermann und Freiherrn von Tschirnhaus.* Herausgegeben von C. I. Gerhardt, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1962.

[71] N. Levinson and R. Redheffer, *Complex Variables*. Dover Publications, 1972.

[72] Joseph Liouville, *Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions*, J. de l'École Polytechnique, Heft 21, **13** (1832) 1-69.

[73] Joseph Liouville, *Mémoire sur calcul des différentielles à indices quelconques*, J. de l'École Polytechnique, Heft 21, **13** (1832) 71-162.

[74] Joseph Liouville, *Mémoire sur l'intégration de l'équation* $(mx^2+nx+p)\frac{d^2y}{dx^2}+(qx+r)\frac{dy}{dx}+sy=0$ *à l'aide des différentielles à indices quelconques*, J. de l'École Polytechnique, Heft 21, **13** (1832) 164-186.

[75] Kenneth R. Manning, *The emergence of the Weierstrassian approach to complex analysis*, Archiv Hist. Exact Sciences **14** (1974/75) 297–283.

[76] A. Müller, *Beitrag zur Theorie der Fakultäten*, J. Reine und Angew. Math. **11** (1834) 361–372.

[77] R. Narasimhan and Y. Nievergelt, *Complex Analysis in One Variable*. Birkhäuser–Verlag, 2001.

[78] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Teubner-Verlag, 1906 Nachdruck bei Chelsea 1965.

[79] Ludwig Oettinger, *Untersuchungen über die analytischen Fakultäten*, J. Reine und Angew. Math. **33** (1846) 1–64, 117–163, 226–258, 329–352, **35** (1847) 13–54, **38** (1849) 162–184, 216–240.

[80] Ludwig Oettinger, *Zweiter Nachtrag zu der Theorie der die analytischen Fakultäten*, J. Reine und Angew. Math. **44** (1852) 26–56, 147–180.

[81] Ludwig Oettinger, *Theorie der die analytischen Fakultäten nebst ihrer Anwendungen auf Analysis*, Freiburg 1854.

[82] Martin Ohm, *Versuch eines vollkommen consequenten Systemes der Mathematik*, Band II, 2. Aufl., 1827.

[83] Martin Ohm, *Über das Verhalten der Gammafunktionen zu den Produkten äquidifferenter Faktoren*, J. Reine und Angew. Math. **36** (1848) 277–295.

[84] Martin Ohm, *Über die Behandlung der Lehre der reellen Faktoriellen und Fakultäten nach einer Methode der Einschließung in Grenzen*, J. Reine und Angew. Math. **39** (1850) 23–41.

[85] Martin Ohm, *Die Lehre der endlichen Differenzen und Summen und der reellen Faktoriellen und Fakultäten sowie der Theorie der bestimmten Integrale*, Nürnberg 1851.

[86] Keith B. Oldham and Jerome Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York and London 1974.

[87] Samuel James Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[88] E. Peschl, *Funktionentheorie* 1. Bibliographisches Institut, 1967.

[89] Q.L. Rahman and G. Schmeisser *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 2002.

[90] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, London Mathematical Society Student Texts, **28**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[91] Karin Reich (Hrsg.), *Gauss' Werke in Kurzfassung*, in Algorismus Heft **39**, ERV Dr. Erwin Rauner Verlag, Augsburg 2002.

[92] R. Remmert, *Funktionentheorie* I, II, Springer, 1984, 1991.

[93] Bernhard Riemann, *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*, datiert 14. Januar 1847, posthum erschienen in [**94**], 253-266 (in der Springer-Ausgabe von 1990: 385-398).

[94] Bernhard Riemann, *Gesammelte Werke*

[95] Bertram Ross, *The development of fractional calculus 1695-1900*, Historia Math. **4** (1977) 75-89.

[96] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* 3$^{\text{rd}}$ edition, McGraw-Hill, 1987.

[97] Ivo Schneider *Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667-1754)*, Arch. Hist. Exact Sci. **5** (1968) 177-317.

[98] E.M. Stein and R. Sharkarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 2003.

[99] D.J. Struik, *A Source Book in Mathematics 1200–1800*, Princeton University Press, Princeton 1986.

[100] Rüdiger Thiele, *Leonhard Euler*, Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner **56**, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1982.

[101] E. C. Titchmarch, *The Theory of Functions* (2nd ed.) , Oxford University Press, 1939.

[102] E. C. Titchmarch, *The Theory of the Riemann Zeta–Function* (2nd ed.) , Revised by D.R. Heath-Brown, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 1986.

[103] Peter Ullrich, *Weierstraß' Vorlesung zur "Einleitung in die Theorie der analytischen funktionen"*, Archiv Hist. Exact Sciences **40** (1989) 143–172.

[104] Alexandre-Théophile Vandermonde, *Mémoire sur des Irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle*, Mémoires de l'Academie Royale des Sciences, Année 1772, (1775), 489-498.

[105] C. Wagschal, *Fonctions holomorphes, équations différentielles*, Herrmann, Paris 2003.

[106] Karl Weierstrass, *Über die Entwicklung der Modular–Functionen*, in: Weierstraß, Mathematische Werke **1**, 1–49, Berlin 1894.

[107] Karl Weierstrass, *Bemerkungen über die analytischen Fakultäten*, Beilage zum Jahresbericht über das Progymnasium zu Deutsch-Crone für das Schuljahr 1842–1843. (= Weierstraß, Mathematische Werke **1**, 87–103, Berlin 1894.

[108] Karl Weierstrass, *Über die Theorie der analytischen Fakultäten*, J. Reine und Angew. Math. **51** (1856) 1–60. Nachdruck mit veränderter Einleitung und nachträglichen Anmerkungen von Weierstraß in Weierstraß, Mathematische Werke **1**, 183–260, Berlin 1894.

[109] Karl Weierstrass, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1876, 11–60, Nachdruck in Weierstraß, Mathematische Werke **2**, 77–124, Berlin 1895.

[110] Adolf Pavlovitch Youschkevitch, *The concept of function up to the middle of the 19th century*, Archiv Hist. Exact Sciences **16** (1976/77) 37–85.

Index