

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Für ein festes $p \in (0, 1)$ definieren wir zudem: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zufallsvariable $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Menge $\{X = n\}$ Binomialverteilt mit den Parametern n, p .

Bestimmen Sie die bedingten Erwartungswerte $\mathbb{E}[X|S]$ und $\mathbb{E}[S|X]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für die Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- (1) Y ist $\sigma(X)$ -messbar.
- (2) Es existiert eine Borel-Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Y = g(X)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie im Beispiel 2.2 den Erwartungswert, die Varianz und die Kovarianz der Bernoulli-Irrfahrt.

Bestimmen Sie im Beispiel 2.3 den Erwartungswert und die Varianz des homogenen Poisson-Prozesses.

Abgabe der Aufgaben 1-3: Bis Mittwoch, den 2.5.12, 10.00 Uhr bei Herrn Peter Parczewski (E2 4, Zimmer 208) oder im Sekretariat (E2 4, Zimmer 206).

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $p, q \in (0, 1)$ und zwei Folgen von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sodass:

- X_n sind i.i.d. p -Bernoulli-verteilt ($P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - p$).
- Y_n sind i.i.d. q -Bernoulli-verteilt ($P(Y_n = 1) = q$, $P(Y_n = 0) = 1 - q$).
- Die Familie $(X_n, Y_m, n, m \in \mathbb{N})$ ist unabhängig.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) Die Zufallsvariablen $Z_n := X_n Y_n$, $n \in \mathbb{N}$ sind i.i.d. Welche Verteilung haben sie?
- (2) Seien $S_n := \sum_{m=1}^n X_m$ und $T_n := \sum_{m=1}^n Z_m$, $n \in \mathbb{N}$. Welche Verteilung haben S_n und T_n ?
- (3) Sei $\tau(\omega) := \inf\{n \geq 1 : T_n(\omega) = 1\}$ ($\inf \emptyset = \infty$). Zeigen Sie: $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $S_\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\omega \mapsto S_{\tau(\omega)}(\omega)$ sind Zufallsvariablen. Welche Verteilung hat τ ?
- (4) $P(X_k = 1 | \tau = n) = P(X_k = 1 | Z_k = 0) = \frac{p(1-q)}{1-pq}$, $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$.
- (5) $P(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i) | \tau = n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i | \tau = n)$, $x_i \in \{0, 1\}$.
Bestimmen Sie damit $P(S_\tau = k | \tau = n)$.
- (6) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[S_\tau | \tau = n]$ und $\mathbb{E}[S_\tau]$ und prüfen Sie, ob die folgenden Identitäten gelten:

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[\tau] \mathbb{E}[X_1], \quad \mathbb{E}[T_\tau] = \mathbb{E}[\tau] \mathbb{E}[Z_1].$$

Abgabe der Aufgabe 4: Bis Dienstag, den 8.5.12, in der Vorlesung.