

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 3

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Bedingung jeweils hinreichend für das Optional Sampling Theorem (Satz 4.6) ist:

- (1) Die Stoppzeit τ ist beschränkt.
- (2) Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ist *uniform integrierbar*, d.h.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_t| \mathbf{1}_{|X_t| > K}] = 0.$$

Aufgabe 9 (1+3+1+6 Punkte)

- (i) Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 1$ und

$$M_n := \prod_{i=1}^n X_i, \quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Zeigen Sie: $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Martingal.

- (ii) Sei $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit mit

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \forall A \in \mathcal{F}_n P(T \leq n + N | A) > \varepsilon.$$

Dann gilt $\mathbb{E}[T] < \infty$.

Zeigen Sie hierfür zuerst

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

ABRACADABRA! Ein Affe tippt zufällig auf einer Schreibmaschine (mit genau 26 Buchstaben). Sei T die Zeit, bis der Affe das erste Mal das Wort ABRACADABRA getippt hat.

- (iii) Zeigen Sie: $\mathbb{E}[T] < \infty$.

- (iv) Wir zeigen nun mit einem fairen Spiel und Martingaltheorie:

$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$

Zu den Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}$ setzt ein Spieler einen Euro darauf, dass der Affe als ersten Buchstaben ein A schreibt. Wenn er gewinnt, erhält er 26 Euro und setzt diese im zweiten Spiel darauf, dass der Affe den nächsten Buchstaben B tippt. Gewinnt er, so bekommt er 26^2 Euro ausgezahlt, usw. Verliert der Spieler, so ist das Spiel für ihn beendet. Das Spiel ist insgesamt beendet, wenn erstmals das Wort ABRACADABRA erscheint. Verwenden Sie hierbei für jeweils festes $n \in \mathbb{N}$ die unabhängigen Zufallsvariablen

$$Y_{n,i} = \mathbf{1}_{\{\text{Der } n\text{-te Spieler tippt den } i\text{-ten Buchstaben richtig } (i \leq 11)\}} + \frac{1}{26} \mathbf{1}_{\{i > 12\}},$$

Dann ist der Gewinn des n -ten Spielers nach l Buchstaben gegeben durch $Z_{n,l} := \prod_{i=1}^l (26Y_{n,i})$

Betrachten Sie nun den Gesamtgewinn $V_n := \sum_{l=0}^{n-1} Z_{n-l,l+1}$.

Zeigen Sie: $(V_n - n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_{k,i} : k + i \leq n + 1)$.

Folgern Sie mit $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : V_n \geq 26^{11}\}$ die Aussage.

Abgabe: Bis Dienstag, den 22.5.12, in der Vorlesung.