Prof. Dr. Christian Bender
Peter Parczewski Universität des Saarlandes SS 2012 5.5.12

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 6

Aufgabe 14 (3+4+3+5 Punkte)

Angenommen, eine Bakterienart befindet sich in einem Nährmedium, in dem jedes Individuum genau einen Tag überlebt. Zudem produziert jedes Individuum Nachkommen.
Eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $I = \mathbb{N}_0$, Startwert $X_0 \in \mathbb{N}_0$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten $p(j|i)$, $i, j \in I$, beschreibe die Populationsgröße. Dabei gehen wir davon aus, dass jedes Individuum unabhängig von den anderen pro Tag genau 0 Nachkommen mit der Wahrscheinlichkeit p_0 bekommt, genau einen Nachkommen mit der Wahrscheinlichkeit p_1 bekommt, usw. mit $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} p_k = 1$.
Wir untersuchen die Aussterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten. Hierzu definieren wir

$$\phi(i) := P[\exists n \in \mathbb{N}_0 : X_n = 0 | X_0 = i].$$

(i) Zeigen Sie :

$$\phi(i) = \sum_{j\geq 0} \phi(j)p(j|i), i \geq 1, \qquad \phi(0) = 1.$$

(ii) Leiten Sie die Übergangswahrscheinlichkeit der Population in den jeweiligen Modellen her:

(1) Die Anzahl der Nachkommen eines jedes Individuums ist unabhängig $Binom_{N,q}$-verteilt mit $N \in \mathbb{N}_0$, $q \in (0, 1)$. Dann gilt:

$$p(j|i) = \binom{Ni}{j} q^j (1-q)^{Ni-j}.$$

(2) Die Anzahl der Nachkommen eines jedes Individuums ist unabhängig $Poiss_\lambda$-verteilt mit $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$p(j|i) = \frac{(\lambda i)^j}{j!} \exp(-\lambda i).$$

Sei von nun an das Modell (2) fixiert. Wir verwenden ohne Beweis $\phi(i) = \phi(1)^i$.
(iii) Zeigen Sie: Für $\lambda \leq 1$ ist $\phi(i) = 1$, $i \in \mathbb{N}_0$ und für $\lambda > 1$ gilt $\phi(1) \in \{\widehat{r}, 1\}$, wobei $\widehat{r} \in (0, 1)$ die Gleichung $r = \exp((r-1)\lambda)$ löst.
(iv) Wir untersuchen nun $\lambda > 1$ etwas genauer. Wir definieren

$$F(x) := \sum_{k\geq 0} p_k x^k.$$

Zeigen Sie mit Induktion:

$$p^{(n)}(0|1) = F^{(n)}(0),$$

wobei $F^{(n)}(0) = F(F(\cdots F(0)))$ die n-te Komposition von F ist und $F^{(0)}(x) = x$.
Folgern Sie anschliessend

$$\phi(1) = \lim_{n\to\infty} F^{(n)}(0)$$

und induktiv

$$F^{(n)}(0) \leq \widehat{r}.$$

Somit ist $\phi(1) \leq \widehat{r}$ und die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$1 - \widehat{r}^K,$$

sofern die Population mit $X_0 = K$ Individuen beginnt.

Abgabe: Bis Dienstag, den 12.6.12, in der Vorlesung.