Prof. Dr. Christian Bender
Christoph Eisinger
Peter Parczewski

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Übungsblatt 10

Aufgabe 35 (2 Punkte)

Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Schätzern für $g(\vartheta)$, so dass $\lim_{n\to\infty} R(\vartheta, T_n) = 0$ für alle $\vartheta \in \Theta$. Zeigen Sie: Dann ist die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konsistent.

Aufgabe 36 (9 Punkte)

In einer Population mögen drei Arten von Individuen gemäß der Hardy-Weinberg-Proportionen $p_1 = \vartheta^2$, $p_2 = 2\vartheta(1-\vartheta)$ und $p_3 = (1-\vartheta)^2$ auftreten, $0 < \vartheta < 1$. Bei einer Stichprobe vom Umfang n sei n_i-mal die Art i aufgetreten, wobei $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{2n_1 + n_2}{2n}$$

der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ ist, falls $2n_1 + n_2$ und $n_2 + 2n_3$ positiv sind.

Aufgabe 37 (9 Punkte)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Beobachtungen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Die Verteilung von X_1 hat die Dichte

$$f_\vartheta(x) := \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\frac{1}{2}\vartheta^3 x^2 e^{-\vartheta x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei der Parameter $\vartheta > 0$ unbekannt und zu schätzen ist.

(i) Zeigen Sie, dass es sich bei $f_\vartheta(x)$ für alle $\vartheta > 0$ um eine Dichte handelt.
(ii) Formulieren Sie das statistische Modell.
(iii) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 28.6.12, 10.30 Uhr in den Briefkästen im Hörsaalgebäude E 2 5, Untergeschoss.