

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

## Übungsblatt 13

### Aufgabe 46 (5 Punkte)

Ein neues biometrisches System an Flughäfen hat folgende Eigenschaften: Alle im Archiv aufgeführten Terroristen werden mit 95 Prozent Sicherheit erkannt. Ein unbescholtener Bürger wird dagegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15 als Terrorist identifiziert. Aus Erfahrung wird geschätzt, dass sich unter einer Million Fluggästen ungefähr ein gesuchter Terrorist befindet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein vom System als Terrorist Identifizierter wirklich ein Terrorist ist?

### Aufgabe 47 (5 Punkte)

Für eine Menge  $C$  bezeichnet  $\mathbf{1}_C(x) := \begin{cases} 1 & x \in C, \\ 0 & x \notin C \end{cases}$  die *Indikatorfunktion* von  $C$ .

Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein diskreter W-Raum und  $A, B \in \mathcal{F}$ . Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i)  $A$  und  $B$  sind unabhängig.
- (ii)  $\mathbf{1}_A$  und  $\mathbf{1}_B$  sind unabhängige Zufallsvariablen.

### Aufgabe 48 (5 Punkte)

- (i) Wir betrachten die Menge  $\Omega = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  und die folgenden Zufallsvariablen
  - (a)  $X(\omega) = 2\omega$ .
  - (b)  $X(\omega) = \omega^2$ .
  - (c)  $X(\omega) = |\omega| + 2$ .

Bestimmen Sie jeweils die kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  über  $\Omega$ , sodass  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ist. Wieso spielt hier das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  keine Bedeutung?

- (ii) Sei nun das W-Maß  $P(\{\omega\}) = 1/6$  für  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  und  $P(\{0\}) = 0$ . Bestimmen Sie für (b) und (c) die Verteilung  $P_X$  von  $X$ .

### Aufgabe 49 (5 Punkte)

Auf einem W-Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sei  $(X, Y)$  ein Zufallsvektor mit Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) := \frac{1}{T} \mathbf{1}_{[0,T]}(x) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) \lambda \exp(-\lambda y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei  $T > 0$  und  $\lambda > 0$  Konstanten sind.

- (i) Zeigen Sie, dass es sich bei  $f_{X,Y}$  tatsächlich um eine Dichte handelt.
- (ii) Bestimmen Sie die Dichten  $f_X$  und  $f_Y$  von  $X$  bzw.  $Y$ .
- (iii) Bestimmen Sie die Dichte  $f_{X+Y}$  der Zufallsvariablen  $X + Y$ .

**Abgabe:** Bis Donnerstag, den 19.7.12, 10.30 Uhr in den Briefkästen im Hörsaalgebäude E 2 5, Untergeschoss.