Prof. Dr. Christian Bender
Christoph Eisinger
Peter Parczewski

Universität des Saarlandes SS 2012 2.5.12

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Übungsblatt 3

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Es seien drei Urnen mit weißen und schwarzen Kugeln gegeben. In der ersten Urne sind genau zwei weiße und zwei schwarze Kugeln enthalten. Die zweite Urne enthält genau zwei weiße und eine schwarze Kugel. Die dritte Urne enthält genau drei weiße und zwei schwarze Kugeln.
Man wählt nun zufällig eine der beiden ersten Urnen aus. Nun zieht man aus dieser gewählten Urne zufällig zwei Kugeln und legt sie in die dritte Urne. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, aus der dritten, nun aufgefüllten Urne eine schwarze Kugel zu ziehen?

Aufgabe 11 (2+2 Punkte)

(i) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Poisson-Verteilung aus Beispiel 1.13.
(ii) X und Y seien zwei unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit den Parametern $\lambda > 0$ bzw. $\mu > 0$ auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Bestimmen Sie mit der Faltungsformel die Verteilung von $X + Y$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \{0, 1, \ldots, 10\}$ Laplace-verteilt. Desweiteren sei $Y = 25 - (X - 5)^2$. Überprüfen Sie die Zufallsvariablen X und Y auf Unkorreliertheit und Unabhängigkeit.

Aufgabe 13 (6 Punkte)

Seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, \ldots$ eine abzählbare Familie von Mengen in Ω. Verifizieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - \mathbf{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = (1 - \mathbf{1}_{A_1})(1 - \mathbf{1}_{A_2}) \cdots (1 - \mathbf{1}_{A_n})$$

und folgern Sie daraus die Einschluss-Ausschluss-Formel:

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I| = k} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst die Aussage für $n = 2$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 10.5.12, 10.30 Uhr in den Briefkästen im Hörsaalgebäude E 2 5, Untergeschoss.