

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Übungsblatt 4

Aufgabe 14 (6 Punkte)

Die Nationalmannschaft gelangt verspätet zu einem Spiel. Die elf Spieler der Startaufstellung ziehen nacheinander jeweils ein Trikot von dem zufällig sortierten Stapel ihrer elf Trikots. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest ein Spieler sein eigenes Trikot trägt?

Angenommen, der Stapel umfasst nun alle 23 Trikots und die 23 Spieler nehmen zufällig ein Trikot. Wieso wird die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest ein Spieler sein richtiges Trikot trägt, sich nur noch wenig verändern?

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Wir werfen eine faire Münze unabhängig n mal ($n \in \mathbb{N}$). Sei S_n die Anzahl von „Kopf“ bei diesen n Würfeln.

- (i) Finden Sie für die folgenden Werte von n eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass $\frac{S_n}{n}$ sich von $1/2$ um weniger als 0.1 unterscheidet:
a) $n = 100$, b) $n = 1000$ c) $n = 100\,000$.
- (ii) Wie muß die Aufgabe (i) und die Antwort bei einer unfairen Münze mit $\mathbb{P}[\text{Kopf}] = 4/7$ korrigiert werden?

Aufgabe 16 (5 Punkte)

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Wir definieren die Zufallsvariablen

$$Z_\xi(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\omega; X_i(\omega) = \xi\}}$$

für $\xi \in X_1(\Omega)$. Schätzen Sie

$$P(\{|Z_\xi - P(\{X_1 = \xi\})| \geq \epsilon\})$$

mit Hilfe des Gesetzes der großen Zahlen ab.

Aufgabe 17 (5 Punkte)

Um den Ausgang der Landtagswahl zu prognostizieren, werden $n \in \mathbb{N}$ Personen zufällig und unabhängig (und anonym) nach ihrer Wahl gefragt. Die Prognose $p_P(n)$ für eine gewisse Partei P ist demnach die Anzahl der Personen, die die Partei P wählen, geteilt durch n . Wie groß muß n gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass für jede Partei P die Prognose $p_P(n)$ bis auf 1% korrekt ist, mindestens 95% beträgt? Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz.

Abgabe: Bis **Mittwoch**, den 16.5.12, 16.30 Uhr in den Briefkästen im Hörsaalgebäude E 2 5, Untergeschoss.