Prof. Dr. Christian Bender
Christoph Eisinger
Peter Parczewski

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Übungsblatt 5

Aufgabe 18 (4 Punkte)

(i) Sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Zeigen Sie mit einer Substitution und anschliessenden Transformation auf Polarkoordinaten

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)f(y)dxdy = 1,$$

und folgern Sie, dass f eine Dichte auf $\mathbb{R}$ ist.
(ii) Sei $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)\mathbf{1}_{[0,2]}(x)$. Zeigen Sie, dass es sich bei f um eine Dichte auf $\mathbb{R}$ handelt und bestimmen Sie $P([1/2, 2])$.

Aufgabe 19 (2+2+2+2 Punkte)

Die bezüglich Inklusion kleinsten nichtleeren Elemente einer σ-Algebra nennen wir *Atome*.
Zeigen Sie nacheinander folgende Aussagen:

(i) Verschiedene Atome sind disjunkt.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine endliche σ-Algebra.

(ii) Jedes nichtleere Element $A \in \mathcal{A}$ enthält ein Atom.
(iii) Jedes Element $A \in \mathcal{A}$ ist eine (eindeutige) endliche Vereinigung von Atomen.
(iv) $\exists n \in \mathbb{N} : |\mathcal{A}| = 2^n$.

Aufgabe 20 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und die Funktion $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ mit $P(\Omega) = 1$ und endlich additiv (d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, gilt $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$).

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) P ist σ-additiv.
(2) P ist stetig von oben.
(3) P ist stetig von unten.
(4) P ist stetig (von oben) in $\emptyset$.
(5) P ist stetig (von unten) in Ω.

Aufgabe 21 (2 Punkte)

Sei f eine Dichte auf $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ und

$$F(x_1, \dots, x_k) := \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(y_1, \dots, y_k)dy_1 \cdots dy_k.$$

Rechnen Sie für F die Eigenschaften (F i) - (F iii) aus Satz 5.15 nach.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 24.5.12, 10.30 Uhr in den Briefkästen im Hörsaalgebäude E 2 5, Untergeschoss.