Prof. Dr. Christian Bender Universität des Saarlandes SS 2012 30.5.12
Christoph Eisinger
Peter Parczewski

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Übungsblatt 7

Aufgabe 25 (3+3 Punkte)

(i) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum und $X_i : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen. Zudem seien für $k, l \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Zeigen Sie: Für jede Wahl von disjunkten Mengen $A, B \subset \mathbb{N}$ mit $A := \{a_1, \ldots, a_k\}$, $B := \{b_1, \ldots, b_l\}$, sind die Zufallsvariablen $f(X_{a_1}, \ldots, X_{a_k})$ und $g(X_{b_1}, \ldots, X_{b_l})$ unabhängig.
(ii) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f. Bestimmen Sie die Dichte von $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Aufgabe 26 (2+2 Punkte)

Seien X $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt und Y $Exp(1)$-verteilt und unabhängig.

(i) Bestimmen Sie die Dichte von $X + Y$.
(ii) Bestimmen Sie $P[|X + Y| \leq 1]$.

Aufgabe 27 (3+3 Punkte)

(i) Sei X $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt und $a > 0$. Dann ist auch

$$Y := \begin{cases} X & , |X| \leq a \\ -X & , |X| > a \end{cases}$$

$\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.
(ii) Sei (X, Y) $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$-verteilt mit $\Sigma = \begin{pmatrix} K & \rho K \\ \rho K & K \end{pmatrix}$, $K > 0$, $\rho \in (0,1)$ und $\mu_2 = \rho\mu_1$. Zeigen Sie, dass dann X und $Y - \rho X$ unabhängig sind.

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2 \ldots$ unabhängig und identisch Poisson-verteilt mit Parameter 1, $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ und $\Phi(x)$ die Standard-Normalverteilung. Beweisen Sie:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| P[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq x] - \Phi(x) \right| = 0.$
(ii) Zeigen Sie mit (i): $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}.$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 6.6.12, 16.30 Uhr in den Briefkästen im Hörsaalgebäude E 2 5, Untergeschoss.