

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Übungsblatt 8

Aufgabe 29 (2+1+1+2+2 Punkte)

In dieser Aufgabe führen wir zuerst das folgende Experiment durch:

Wir nehmen ein Blatt Papier und zeichnen parallele Linien exakt im Abstand von 2 cm ein. Dann nehmen wir eine (möglichst dünne) Bleistiftmine und brechen ein Stück mit genau der Länge 1,5 cm ab.

Nun wird die kleine Mine aus einer Höhe von mindestens 30 cm mit der Spitze nach unten auf das Linienmuster fallengelassen, so dass sie vollständig auf dem Blatt mit dem Linienmuster liegen bleibt. Andernfalls gilt der Versuch als ungültig und wird wiederholt. Wir vermerken:

Eine 1, wenn die Mine liegen bleibt, so dass sie eine Linie des Papiers schneidet.

Eine 0 wenn die Mine liegen bleibt, so dass sie keine Linie des Papiers schneidet.

- (i) Führen Sie diesen Versuch 50 Mal durch und stellen Sie ihr Ergebnis in einem Stabdiagramm dar.

Nun modellieren wir dies durch ein Zufallsexperiment: Die Zufallsvariable M beschreibe den minimalen Abstand des Mittelpunkts der Mine zur nächstgelegenen Linie des Musters. M ist somit gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$. Überdies unterliegt der kleinere Winkel ϕ zwischen der Mine und der Parallele des Linienmusters durch den Mittelpunkt der Mine einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \pi/2]$. Diese beiden Zufallsvariablen Mittelpunkt und Winkel werden als unabhängig modelliert.

- (ii) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte der Zufallsvariable (M, ϕ) .

- (iii) Zeigen Sie: Der obige Versuchsausgang ist 1 genau dann, wenn $M \leq \frac{3 \sin(\phi)}{4}$.

- (iv) Zeigen Sie:

$$P\left[M \leq \frac{3 \sin(\phi)}{4}\right] = \frac{3}{2\pi}.$$

- (v) Wie kann man dieses Experiment zur Approximation von π verwenden?

(Bitte wenden)

Aufgabe 30 (8 Punkte)

Im Rahmen einer Befragung von Studierenden werden die Merkmale B:=„Studienfach“, C:=„Studienbeginn“, D:=„Arbeitsaufwand pro Semesterwoche in Stunden“ und E:=„Notendurchschnitt aller bisheriger Benotungen im Studium“ untersucht. Unter Verwendung der Bezeichnungen M:=„Mathematik“, I:=„Informatik“, P:=„Physik“ und L:=„Lehramt“ liege folgende Liste vor:

Stichprobe	B	C	D	E
1	M	2008	45	1.7
2	M	2006	58	2.0
3	L	2009	38	2.0
4	M	2005	62	1.5
5	L	2004	60	1.9
6	I	2006	55	2.3
7	L	2009	40	1.3
8	M	2002	50	2.8
9	I	2003	35	2.1
10	P	2009	40	2.5
11	M	2005	70	1.5
12	M	2005	45	3.3

- (i) Erstellen Sie zum Merkmal B ein Kreisdiagramm
- (ii) Ermitteln Sie für Merkmal C die Ordnungsstatistik sowie die 5-Punkte-Zusammenfassung.
- (iii) Erstellen Sie den Boxplot für Merkmal D. Ermitteln Sie auch Mittelwert und die empirischen Standardabweichung des Merkmals E.
- (iv) Erstellen Sie das Streudiagramm (Scatterplot) der beiden Merkmale F:=„Studiendauer bis einschließlich 2012“ und D, ermitteln Sie die Regressionsgerade für die Abhängigkeit von D von F und zeichnen Sie diese in das Streudiagramm ein.

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit unbekannter Varianz. Zeigen Sie, dass die empirische Varianz

$$s_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz von X_1 ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 14.6.12, 10.30 Uhr in den Briefkästen im Hörsaalgebäude E 2 5, Untergeschoss.