Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
20. April 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

1. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $q \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $p : \{0,1\}^n \to [0,1]$, welche durch

$$\forall\, i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\} : \quad p(i_1, \ldots, i_n) = q^{\sum_{j=1}^n i_j}(1-q)^{n-\sum_{j=1}^n i_j}$$

gegeben ist, eine Zähldichte auf $\Omega = \{0,1\}^n$ definiert.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Seien A, B und C drei Ereignisse in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Wir definieren die symmetrische Differenz als

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie, dass

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(ii) $P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

(iii) $P(A\Delta C) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta C)$.

Aufgabe 3 (4+5+1 Punkte)

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Zeigen Sie mittels eines Induktionsbeweises, dass

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right).$$

(ii) Es werden n Briefe rein zufällig in n paarweise verschieden adressierte Briefumschläge gesteckt, wobei jede der Adressen auf den Briefumschlägen zu genau einem der Briefe gehört. Beschreiben Sie mathematisch das zu Grunde liegende diskrete Zufallsexperiment und geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gesteckt wird.

(iii) Berechnen Sie den Grenzwert der in (ii) bestimmten Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.