Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
22. Juni 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

10. Übung

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

Für ein Land sei bekannt, dass der Anteil α der wahlberechtigten Bevölkerung, welcher eine Abspaltung aus einer Ländergemeinschaft befürwortet, zwischen 25% und 35% liegt. Eine Partei P, deren Mitglieder überwiegend für die Abspaltung sind, will ihre Klientel mittels eines Referendums zur Abspaltung (Antwortmöglichkeiten: „ja“ und „nein“) zufrieden stellen. Damit der Ausgang des Referendums für die Partei P nicht zu peinlich wird, soll das Referendum nur stattfinden, wenn damit zu rechnen ist, dass mindestens 30% aller Referendumsteilnehmer für die Abspaltung stimmen. Um genauer zu ermitteln, wie populär die Idee der Abspaltung wirklich ist, lässt die Partei P eine Umfrage durchführen, bei der eine repräsentative Auswahl an Personen nach ihrem voraussichtlichen Abstimmungsverhalten in dem Referendum gefragt wird. Von Interesse ist dabei, wie groß die Anzahl n_0 der Teilnehmer an der Umfrage mindestens sein muss, damit die relative Häufigkeit an Stimmen für die Abspaltung bei der Umfrage mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um höchstens 1% von α abweicht. Die Partei P geht davon aus, dass alle Wahlberechtigten an dem Referendum teilnehmen würden.

(i) Bestimmen Sie unter Benutzung der Tschebyscheff-Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke für n_0.

(ii) Bestimmen Sie n_0 approximativ mit dem zentralen Grenzwertsatz (ohne Verwendung der Korrekturterme).

Aufgabe 2 (3+6 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem diskreten W-Raum $(\Omega, 2^\Omega, P)$ mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Außerdem sei $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

(i) Bestimmen Sie den Erwartungswert von

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n \left(X_k - \bar{X}_n\right)^2.$$

(ii) Es gelte $E(X_1^4) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$P\left(\left\{\left|S_n^2 - \sigma^2\right| > \epsilon\right\}\right) \leq \frac{9\mathrm{Var}((X_1-\mu)^2)}{(n-1)\epsilon^2} + \frac{6\sigma^2}{(n-1)\epsilon}.$$

Hinweis: Zeigen Sie für (ii) zunächst, dass

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(X_k-\mu)^2 + \frac{1}{n-1}(X_n-\mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{X}_n-\mu)^2.$$

Aufgabe 3 (1+2 Punkte)

Wir betrachten die Situation von Beispiel 8.6.

(i) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Stichprobenvarianz

$$S_n^2 : \mathscr{X}^n \to [0, \infty), \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_n)^2 , \quad \text{wobei} \quad \bar{x}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die (unbekannte) Varianz ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konsistente Folge von Schätzern für die (unbekannte) Varianz ist, falls $\sum_{y\in\mathscr{X}} y^4 P_\vartheta(\{y\}) < \infty$ für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Zu Beispiel 8.12. Sei X eine $\mathbb{N}$-wertige, P-integrierbare Zufallsvariable auf einem diskreten W-Raum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Zeigen Sie, dass

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X \geq n\}).$$