Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
29. Juni 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

11. Übung

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie für eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable X, dass

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) P(X \geq k).$$

Aufgabe 2 (3+1+3+3+3 Punkte)

Im Kontext von Beispiel 8.12 seien für $n, N \in \mathbb{N}$ $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, welche unter P_N gleichverteilt auf $\{1, \ldots, N\}$ sind. Wir definieren

$$T_n^* := \max_{k \leq n} X_k \qquad \text{sowie} \qquad \tilde{T}_n := \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - 1,$$

wobei wir hier vernachlässigen, dass $\tilde{T}_n$ eigentlich auf $\mathbb{N}$ gerundet werden müsste.

(i) Zeigen Sie, dass $\min_{k \leq n} X_k - 1$ und $N - \max_{k \leq n} X_k$ unter P_N identisch verteilt sind.

(ii) Untersuchen Sie $\tilde{T}_n$ auf Erwartungstreue für N.

(iii) Untersuchen Sie die Folgen $(T_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konsistenz für N.

(iv) Zeigen Sie, dass

$$R(N, T_n^*) = \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{k-1}{N} \right)^n (2(N-k)+1)$$

und berechnen Sie $R(N, \tilde{T}_n)$.

(v) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N \to \infty} \frac{R(N, T_n^*)}{N^2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

und berechnen Sie $\lim_{N \to \infty} R(N, \tilde{T}_n)/N^2$.

Hinweis: Schreiben Sie in (v) $R(N, T_n^*)/N^2$ als Riemann-Summe mit Intervalllänge $1/N$.

Aufgabe 3 (1+4 Punkte)

Von einer Population $\mathscr{P}$ sei bekannt, dass höchstens drei Arten a_k, $k = 1, 2, 3$, von Individuen existieren. Es sei eine Stichprobe aus $\mathscr{P}$ vom Umfang $n \in \mathbb{N}$ gegeben, welche wir als Realisierung von n unabhängigen, identisch verteilten, $\{a_1, a_2, a_3\}$-wertigen Zufallsvariablen auffassen, deren Zähldichte durch

$$\forall\, k \in \{1,2\} :\ p_\gamma(a_k) := \binom{2}{k-1} \gamma^{2-(k-1)} (1-\gamma)^{k-1}$$

mit unbekanntem $\gamma \in [0,1]$ bestimmt ist.

(i) Stellen Sie ein geeignetes zugehöriges diskretes statistisches Modell auf.

(ii) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für γ.