Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
06. Juli 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

12. Übung

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Ein Händler erhält von seinem Lieferanten ein Paket mit 100 Glühbirnen. Er hat das Recht, sie zurückzugeben, wenn mindestens 10 Gühbirnen defekt sind. Um dies zu überprüfen, soll ein Test durchgeführt werden bei dem die Wahrscheinlichkeit, dem Lieferanten fälschlicherweise eine Fehllieferung zu unterstellen durch 10% beschränkt ist.

(i) Der Händler prüft 10 Glühbirnen und nimmt das Paket nur an, wenn alle 10 in Ordnung sind. Geben Sie ein geeignetes diskretes statistisches Modell sowie Hypothese, Alternative und Verwerfungsbereich eines geeigneten Tests an, um dieses Verhalten des Händlers testtheoretisch zu beschreiben.

(ii) Bestimmen Sie das effektive Niveau des in (i) beschriebenen Tests und überprüfen Sie, ob der Test den oben beschriebenen Vorgaben entspricht.

Aufgabe 2 (1+3+7 Punkte)

Sei $\alpha \in (0,1)$. Wir wollen für den unbekannten Parameter $\lambda \in (0,\infty)$ einer Poisson-verteilten Zufallsvariable ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ herleiten. Dazu definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$G_n : (0,\infty) \to (0,1), \quad \lambda \mapsto 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

(i) Stellen Sie ein geeignetes diskretes statistisches Modell für obige Situation auf.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion G_n, $n \in \mathbb{N}$, stetig differenzierbar mit positiver Ableitung ist und dass

$$\lim_{\lambda\to\infty} G_n(\lambda) = 1 \quad \text{sowie} \quad \lim_{\lambda\to 0} G_n(\lambda) = 0$$

gelten.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\underline{\lambda}^{(\alpha)}(n) := \begin{cases} G_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}^{(\alpha)}(n) := G_{n+1}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Zeigen Sie, dass

$$\left(\left(\underline{\lambda}^{(\alpha)}(n), \infty\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{sowie} \quad \left(\left(0, \bar{\lambda}^{(\alpha)}(n)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Konfidenzintervalle für λ zum Niveau $1 - \alpha/2$ sind und dass

$$\left(\left(\underline{\lambda}^{(\alpha)}(n), \bar{\lambda}^{(\alpha)}(n)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

ein Konfidenzintervall für λ zum Niveau $1-\alpha$ ist. Betrachten Sie dazu

$$n_-(\lambda) := \sup\left\{n \in \mathbb{N} : P_\lambda(\{0,\dots,n-1\}) \le \frac{\alpha}{2}\right\}$$
$$n_+(\lambda) := \inf\left\{n \in \mathbb{N}_0 : P_\lambda(\{n+1,n+2,\dots\}) \le \frac{\alpha}{2}\right\},$$

wobei $\sup(\emptyset) := 0$, und zeigen Sie, dass für

- $n_+(\lambda) \ge 1$:
$$n \le n_+(\lambda) \implies \lambda > \underline{\lambda}^{(\alpha)}(n),$$
- $n_-(\lambda) \ge 1$:
$$n \ge n_-(\lambda) \implies \lambda < \bar{\lambda}^{(\alpha)}(n).$$

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)

Sei N eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ und seien $\alpha \in (0,1)$ sowie $\lambda_0 > 0$ fest gewählt. Zudem seien $\underline{\lambda}^{(\alpha)}(n)$ und $\bar{\lambda}^{(\alpha)}(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, wie in Aufg. 2 definiert.

(i) Zeigen Sie, dass der Test, welcher die Hypothese „$\lambda > \lambda_0$“ gegen die Alternative „$\lambda \le \lambda_0$“ für Beobachtungen $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\bar{\lambda}^{(2\alpha)}(n) \le \lambda_0$ verwirft, Niveau α hat. Geben Sie dazu zunächst ein geeignetes diskretes statistisches Modell an.

(ii) Geben Sie analog zu (i) einen Test zum Niveau α an, der die Hypothese „$\lambda \le \lambda_0$“ gegen die Alternative „$\lambda > \lambda_0$“ testet.