Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
13. Juli 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

13. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bei einer Razzia findet die Polizei bei einem Glücksspieler G eine angeblich faire Münze, von der ein anderer Spieler jedoch behauptet, dass „Zahl“ unfairerweise mit einer höheren Wahrscheinlichkeit als $0,5$ erscheint. Aus Zeitgründen kann die Münze nur 10 Mal überprüft werden. Geben Sie einen geeigneten Test gemäß dem Rechtsgrundsatz „Im Zweifel für den Angeklagten“ an, so dass G nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $0,05$ des Betruges verdächtigt wird.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)

Wir wollen eine Aussage über die Verunreingung von Kleesaatgut durch Flachs machen. Dazu werden 100g Saatgut, was sehr vielen Samen entspricht, ausgebracht und es wird die im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Samen sehr geringe Anzahl der aufgegangenen Flachssamen gezählt.

(i) Begründen Sie, warum obige Situation mittels einer Poissonverteilung mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ modelliert werden kann.

(ii) Der Hersteller vermutet, dass pro 100g Packung Saatgut im Mittel nicht mehr als 6 Flachssamen aufgehen und will testen, ob er diese Vermutung guten Gewissens in der Werbung als Behauptung darstellen kann. Dabei soll der Test so konzipiert sein, dass die Wahrscheinlichkeit, fälschlicherweise die hohe Qualität zu behaupten durch 5% beschränkt ist. Geben Sie dazu einen geeigneten Test an. Wie entscheidet dieser Test, wenn bei der Aussaat einer konkreten 100g Packung Saatgut genau 4 Flachssamen aufgehen?

Hinweis: Es gelten folgende Werte,

$$G_4^{-1}(0,025) = 1,09,\ G_4^{-1}(0,05) = 1,365,\ G_4^{-1}(0,95) = 7,755,\ G_4^{-1}(0,975) = 8,765$$

$$G_5^{-1}(0,025) = 1,625,\ G_5^{-1}(0,05) = 1,97,\ G_5^{-1}(0,95) = 9,155,\ G_5^{-1}(0,975) = 10,24,$$

wobei

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, \lambda \in (0,\infty):\ G_n(\lambda) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Realisierungen von unabhängigen Poisson(λ)-verteilten Zufallsvariablen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wobei der Parameter $\lambda \in (0,\infty)$ unbekannt sei. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\overline{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Zeigen Sie für $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\left(\left[\ \overline{x}_n + \frac{1}{2n}u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 - \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}_n - \frac{1}{4n}u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}\ \ ,\ \ \overline{x}_n + \frac{1}{2n}u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{x}_n - \frac{1}{4n}u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}\ \right]\right)_{x\in\mathbb{N}_0^n}$$

ein asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau $(1-\alpha)$ für λ ist, wobei $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängige, auf $[0,\theta]$ gleichverteilte, reelle Zufallsvariablen, wobei $\theta \in (0,\infty)$ unbekannt sei.

(i) Bestimmen Sie in dem zu obiger Situation gehörenden statistischen Standardmodell einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

(ii) Untersuchen Sie den in (i) bestimmten Maximum-Likelihood-Schätzer auf Erwartungstreue für θ.