Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
11. Mai 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

4. Übung

Aufgabe 1 (2+1+4 Punkte)

Es seien (Ω_1, p_1) ein diskretes Zufallsexperiment und $\Omega_2 \neq \emptyset$ eine höchstens abzählbare Menge. Außerdem sei für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ durch $p_2(\cdot|\omega_1) : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ eine Zähldichte auf Ω_2 gegeben. Wir betrachten eine Funktion p auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, welche durch $p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2|\omega_1)$ definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass p eine Zähldichte auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist.

(ii) Sei P das von p induzierte W-Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2})$. Zeigen Sie, dass

$$P(\Omega_1 \times A_2 | \{\omega_1\} \times \Omega_2) = \sum_{\omega_2 \in A_2} p_2(\omega_2|\omega_1)$$

für jedes $A_2 \subset \Omega_2$ gilt.

(iii) Welche Bedingungen muss man an p_2 stellen, damit unter P alle Ereignisse der Form $A_1 \times \Omega_2$ und $\Omega_1 \times A_2$; $A_1 \subset \Omega_1$, $A_2 \subset \Omega_2$; unabhängig sind?

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben seien eine faire Münze und eine unfaire Münze, bei der das Ereignis "Kopf" mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{7}$ auftritt. Die Münzen sind ansonsten identisch. Wir wählen nun zufällig eine Münze aus, werfen sie und erhalten "Kopf".
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der geworfenen Münze um die faire Münze handelt?

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)

Wir werfen einen fairen vierseitigen Würfel, dessen Seiten in den Farben "r :=rot", "b :=blau", "o :=orange" und "g :=grün" eingefärbt sind. Auf dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge $\Omega = \{r, b, o, g\}$ betrachten wir die Zufallsvariablen

$$X_1 := \mathbb{1}_{\{r\}} + \mathbb{1}_{\{b\}}, \quad X_2 := \mathbb{1}_{\{r\}} + \mathbb{1}_{\{o\}}, \quad X_3 := \mathbb{1}_{\{r\}} + \mathbb{1}_{\{g\}}.$$

(i) Bestimmen Sie die Verteilung von X_1, X_2 und X_3.

(ii) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

(iii) Sind X_1, X_2 und X_3 unabhängig?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien Ω eine nichtleere höchstens abzählbare Menge und C eine Teilmenge von Ω. Die mit C assoziierte *Indikatorfunktion* $\mathbb{1}_C$ sei definiert durch

$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in C \\ 0, & \omega \notin C \end{cases}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie für $A, B \in 2^\Omega$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) A und B sind unabhängige Ereignisse,

(ii) $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängige Zufallsvariablen.