Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
18. Mai 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

5. Übung

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

Es seien die Zahlen $1, \dots, n$ in rein zufälliger Reihenfolge $(a_1, ..., a_n)$ gegeben. Aufgabe eines Sortieralgorithmus' ist es, $(a_1, ..., a_n)$ in die sortierte Form $(1, \dots, n)$ zu überführen. Der Sortieralgorithmus *Insertion sort* geht dabei wie folgt vor: Sind die ersten $(k-1)$ Einträge von $(a_1, \dots, a_n)$ bereits der Größe nach sortiert, so wird a_k in die bereits sortierte Liste der ersten Einträge $a_1, \dots, a_{k-1}$ eingefügt, indem alle größeren Zahlen dieser Teilliste um eine Stelle nach rechts verschoben werden. Die Zufallsvariable Y_k, $k = 1, ..., n$, beschreibe die Anzahl der Verschiebungen beim Einsortieren der k-ten Zahl. Die Gesamtzahl der Verschiebungen im Verlauf des Algorithmus bezeichnen wir mit X.

(i) Geben Sie einen geeigneten diskreten W-Raum an und definieren Sie die Zufallsvariablen X und Y_k auf diesem W-Raum.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Bei wiederholtem Werfen einer echten Münze wird folgende Verdopplungsstrategie angewendet: Auf den i-ten Wurf werden 2^{i-1} Euro gesetzt. Fällt Kopf geht das Geld verloren, fällt Zahl erhält man zusätzlich zum Einsatz weitere 2^{i-1} Euro ausgezahlt. Das Spiel wird gestoppt, wenn zum ersten Mal Zahl fällt. Wir bezeichnen mit Y den Verlust eine Runde vor dem Ende des Spiels und mit X den Gewinn am Ende des Spiels.

(i) Geben Sie einen geeigneten diskreten W-Raum an und definieren Sie die Zufallsvariablen X und Y auf diesem W-Raum.

(ii) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{i=1}^{m} 2^i = 2(2^m - 1)$ für $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter W-Raum mit endlicher Ergebnismenge Ω. Weiter sei X eine auf Ω gleichverteilte reelle Zufallsvariable. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ für $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter W-Raum. Weiter sei X eine Poisson-verteilte reelle Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.