Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
25. Mai 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

6. Übung

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien X und Y Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda > 0$ bzw. $\gamma > 0$. Außerdem seien X und Y unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $X + Y$.

Aufgabe 2 (5+1 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariablen mit $E[X^2] < \infty$, $\mathrm{Var}(X) > 0$ und $E[Y^2] < \infty$. Außerdem seien $a^*, b^* \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E\left[|Y - (a^*X + b^*)|^2\right] = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} E\left[|Y - (aX + b)|^2\right].$$

(i) Bestimmen Sie a^* und b^*.

(ii) Zeigen Sie, dass $a^* = 0$ genau dann, wenn X und Y unkorreliert sind.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $[-n, n] \cap \mathbb{Z}$, so dass $P(X = k) = P(X = -k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Außerdem sei $Y = aX^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Sind X und Y unabhängig bzw. unkorreliert?

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

In der gynäkologischen Abteilung eines Krankenhauses entbinden in einer bestimmten Woche $n \in \mathbb{N}$ Frauen. Es werde angenommen, dass keine Mehrlingsgeburten auftreten. Weiterhin werde angenommen, dass bei jeder Geburt die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen gleich der Wahrscheinlichkeit für ein Mädchen sei und dass das Geschlecht der Neugeborenen für alle Geburten stochastisch unabhängig sei. Wir bezeichnen mit p_n die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 60% der Neugeborenenen weiblich sind.

(i) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $p_{100} < p_{10}$, ohne den exakten Wert für p_{100} explizit zu verwenden.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter W-Raum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unkorrelierten, reellwertigen Zufallsvariablen mit $E(X_1) = E(X_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\sup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Var}(X_i) < \infty$. Zudem sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie

$$n^\alpha \left(\overline{X}_n - E(X_1)\right)$$

für $\alpha < \frac{1}{2}$ auf Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.