Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
01. Juni 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

7. Übung

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für nichtleere Mengen Ω und Ω_0:

(i) Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\Omega_0 \subseteq \Omega$. Dann ist $\mathcal{A} \cap \Omega_0 := \{A \cap \Omega_0 : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf Ω_0.

(ii) Für $E := \{A \subseteq \Omega : A \text{ endlich}\}$ gilt $\sigma(E) = \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^\complement \text{ höchstens abzählbar}\}$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zum Beweis von Lemma 5.5. Es sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf Ω. Dann ist

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{A}_i \,\forall\, i \in I\}$$

eine σ-Algebra.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Geben Sie explizite Darstellungen folgender σ-Algebren auf $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ an:

$$\mathcal{A}_1 := \sigma(\{1\}, \{2, 3\}), \qquad \mathcal{A}_2 := \sigma(\{1, 2\}, \{3\}), \qquad \mathcal{A}_3 := \sigma(\{1, 3\}, \{2\}).$$

Untersuchen Sie außerdem, ob

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2, \qquad \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3, \qquad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$$

σ-Algebren auf Ω sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zum Beweis von Lemma 5.8. Zeigen Sie, dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ äquivalent ist zu

(i) $\sigma(\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\})$,

(ii) $\sigma(\{[a, b] \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\})$,

(iii) $\sigma(\{[a, b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\})$.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)

Zum Beweis von Satz 5.12. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass P die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) *Stetigkeit von unten:*

$$A_n \subseteq A_{n+1}\,\forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(ii) *Stetigkeit von oben:*

$$A_n \supseteq A_{n+1}\,\forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Zu Bemerkung 5.19. Sei $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, P)$ ein W-Raum und sei F die Verteilungsfunktion von P. Zeigen Sie, dass dann

$$\Delta_a^b F = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2])$$

für alle $a = (a_1, a_2),\ b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \leq b$ gilt.