Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
8. Juni 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

8. Übung

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

Es seien $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R}: \;\; f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha^\beta}{(\beta-1)!} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

(i) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{N}$

$$\lim_{K\to\infty} \int_{[-K,K]} f_{\alpha,\beta}(x)\, dx = 1$$

gilt.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariablen X mit Dichte $f_{\alpha,\beta}$.

(iii) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer exponential-verteilten Zufallsvariablen X mit Parameter $\alpha > 0$.

Aufgabe 2 (6+2 Punkte)

(i) Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable mit Dichte. Zeigen Sie, dass $aX + b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a \neq 0$, eine Dichte besitzt.

(ii) Es sei X eine reelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Bestimmen Sie die Dichte von $aX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

Aufgabe 3 (1 Punkte)

Seien X und Y zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass dann auch $aX + b$ und $cY + d$ für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ unabhängig sind.

Aufgabe 4 (2+2+1 Punkte)

Sei $c \in (0, \infty)$ und sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \;\; f(x) = 6x(c - x)\mathbb{1}_{[0,c]}(x).$$

(i) Zeigen Sie, dass $c = 1$ gilt.

(ii) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(iii) Berechnen Sie $P(\{1/3 \leq X \leq 2/3\})$.