Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Christian Gärtner

Universität des Saarlandes
SoSe 2016
15. Juni 2016

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

9. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei (X,Y) eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable, deren Dichte gegeben ist durch

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f_{(X,Y)}(x,y) := \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\mathbb{1}_{[1,2]}(y) + \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

Untersuchen Sie, ob X und Y unabhängig bzw. unkorreliert sind.

Hinweis:

- Für die Dichte f_X von X gilt $f_X(x) = \lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$ und analog für Y.
- Betrachten Sie die Mengen $\{X > \frac{1}{2}\}$ und $\{Y > 1\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie $E(X^n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Seien X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

(i) X^2 die Dichte f hat, welche gegeben ist durch

$$\forall\, x\in\mathbb{R}:\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}.$$

(ii) $X^2 + Y^2$ exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{2}$ ist.

Hinweis:

- In (i) brauchen Sie nicht zu zeigen, dass f eine Riemann-Dichte ist.
- In (ii) können Sie die Substitution $y = x(1-z^2)$ verwenden.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

An einem Fitnesskurs können insgesamt 150 Leute teilnehmen. Der Veranstalter rechnet damit, dass eine zum Kurs angemeldete Person nur in durchschnittlich 95% der Fälle tatsächlich erscheint. Pro Kurs möchte der Veranstalter 155 Anmeldungen annehmen und möchte daher die Wahrscheinlichkeit wissen, dass bei 155 angemeldeten Personen mehr als 150 zum Kurs erscheinen.

(i) Berechnen Sie approximativ die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes. Benutzen Sie hierfür die Korrekturterme. Die Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung finden Sie in der beigefügten Tabelle.

(ii) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Poisson-Approximation der Binomialverteilung.

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Beispiel für x=1,55: Φ(1,55)=0,93943