Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Ch. Bender
S. Pokalyuk 16. Oktober 2009

Stochastik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 *Sei $\Im^n$ das System der halboffenen Quadermengen im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:*

a) Für je zwei Intervalle $A, B \in \Im^n$ ist $A \cap B \in \Im^n$.

b) $\Im^n$ ist ein Präring auf dem $\mathbb{R}^n$.

4 Punkte

Aufgabe 2 (Satz 1.7, (ii)) *Sei $\mathcal{M}$ ein Präring mit $\Omega \in \mathcal{M}$, $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ der erzeugte Körper und $\mu_0 : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ σ-additiv. Zeigen Sie, dass auch die Ausweitung $\mu : \mathcal{K}(\mathcal{M}) \to [0, \infty]$ σ-additiv ist.*

4 Punkte

Aufgabe 3 (Satz 1.9) *Es sei $\mathcal{K}$ ein Körper und $\mu : \mathcal{K} \to [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann gilt für $A, B \in \mathcal{K}$:*

(i) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ und $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A) < \infty$.

(ii) $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(iii) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{K}$ disjunkt $\Rightarrow \mu(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)$.

(iv) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{K} \Rightarrow \mu(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu)$.

4 Punkte

Aufgabe 4 *Ein System $\mathfrak{D}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt Dynkin System in Ω, wenn*

(i) $\Omega \in \mathfrak{D}$,

(ii) $D \in \mathfrak{D} \Longrightarrow D^c \in \mathfrak{D}$,

(iii) für jede Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{D}$ liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ in $\mathfrak{D}$.

Zeigen Sie: Ein Dynkin System $\mathfrak{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $D_1 \cap D_2 \in \mathfrak{D}$ für alle $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$.

4 Punkte

Abgabe bis Freitag, den 23.10.09 um 12.00 Uhr in den Räumen 206, 207.