Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Ch. Bender
S. Pokalyuk 18. Dezember 2009

Stochastik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Satz 4.2.7) *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:*

(i) Es existiert eine Zufallsvariable X mit $X_n \to X$ P-fast sicher.

(ii) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge bezüglich fast sicherer Konvergenz, d.h.

$$P(\{\omega; (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ ist Cauchyfolge}\}) = 1.$$

(iii) Für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\sup_{k\geq 1} |X_{n+k} - X_n| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Beweismethode aus Satz 4.2.3, (iii).

6 Punkte

Aufgabe 2 *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $X_n \to c$ in Verteilung. Zeigen Sie, dass $X_n \to c$ in Wahrscheinlichkeit.

b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^p] < \infty$ für ein $p > 0$. Zeigen Sie, dass $X_n \to 0$ P-fast sicher.
Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Borel-Cantelli.

5 Punkte

Aufgabe 3 *Es seien*

$$A_n^i := \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

und

$$X_n^i := \mathbf{1}_{A_n^i}(\omega),\ i = 1, ..., n\ (n \in \mathbb{N}),$$

eine Folge von Zufallsvariablen auf $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]})$. Zeigen Sie, dass die Folge $(X_1^1, X_2^1, X_2^2, X_3^1, X_3^2, X_3^3, ...)$ in Wahrscheinlichkeit und in $L^p(\lambda_{[0,1]})$, $p > 0$, konvergiert, aber sie konvergiert für kein $\omega \in [0,1]$.

5 Punkte

Abgabe Freitag, den 08.01.10 in der Übung.
Am 11.01.10 fällt die Vorlesung aus.
Am 15.01.10 findet eine Vorlesung anstelle der Übung statt.

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!