

Stochastik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identischverteilten Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit $\mu := E[X_1]$, $\sigma^2 := \text{Var}(X_1) < \infty$ ($\sigma^2 \neq 0$) und $Y_n := X_1 + \dots + X_n$. Zeigen Sie, dass das schwache Gesetz der großen Zahlen für:

- $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht erfüllt ist.
- $(a_n Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt ist, falls $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

6 Punkte

Aufgabe 2 Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identischverteilten Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit $E[X_1] = 0$, $\text{Var}(X_1) = 1$ und $Y_n := X_1 + \dots + X_n$. Ferner seien $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\nu_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass ν_i unabhängig von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und $F_n(x) := P\left(\left\{\frac{Y_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}} \leq x\right\}\right)$. Zeigen Sie, dass $F_n \rightarrow \Phi$ im wesentlichen, falls $\nu_n \rightarrow \infty$ in Wahrscheinlichkeit, wobei Φ die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung ist.
Hinweis: Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt, dass

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left\{\frac{X_1 + \dots + X_k}{\sqrt{k}} \leq x\right\}\right) P(\{\nu_n = k\}).$$

5 Punkte

Aufgabe 3 Die Wahrscheinlichkeit des Todes eines 30-jährigen Mannes ist 0,006. Eine Versicherungsfirma hat 10000 Verträge mit 30-jährigen Männern gemacht und zahlt im Fall des Todes den Erben 2500 € während des nächsten Jahres aus. Der Preis eines Vertrags beträgt 30 €. Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass:

- zum Ende des Jahres diese Versicherungsfirma einen Verlust hat.
- der Gewinn dieser Versicherungsfirma größer als 100000 € ist.

5 Punkte

Abgabe Freitag, den 22.01.10 in der Übung.